ओ३म्

सरल बीजगणित

प्रथम भाग

(संशोधित तथा परिवर्द्धित संस्करण)

लेखक

प्रोफ़ेसर पीतमलाल ऐम० ऐस० सी०

पूर्व, गणित-प्रोफ़ेसर

आगरा कालिज, आगरा

तथा

राजाराम कालिज, कोल्हापुर (बम्बई प्रान्त)

द्वितीय बार १०००

सन् १९३७

मूल्य ॥) प्रति०

विषय-सूची

भूमिका

अन्धकार है वहां जहां आदित्य नहीं है।
है मुर्दा वह देश जहां साहित्य नहीं है॥

प्रिय पाठकगण ! मैं समझता हूँ कि इस छोटी सी पुस्तक के सम्बन्ध में मेरा कुछ निवेदन आवश्यक है। आप यह बात भली भाँति जानते और अनुभव करते हैं, कि विद्यार्थियों को सरलता और पूर्णरीति से विद्या ग्रहण करने के लिये यह आवश्यक है कि वह सब शिक्षा अपनी मातृभाषा (हिन्दी) द्वारा प्राप्त करें। अथवा दूसरे शब्दों में यह कहना चाहिये कि सम्पूर्ण विद्या और विज्ञान के पढ़ने का माध्यम हिन्दी होनी चाहिये।

परन्तु जब हम इस महत्त्वपूर्ण सिद्धान्त को सामने रखते हुए उसका कार्यरूप में परिवर्त्तन करना चाहते हैं तो हम अनुभव करते हैं कि हमारे यहाँ साहित्य का बिलकुल अभाव है। इस कारण उपरोक्त महान् सिद्धान्त के मानने वाले भी प्रायः निराशा की ओर जाने लगते हैं। परन्तु मैं उन से पूछता हूँ और साहस दिलाता हूँ कि कोई पुरुषार्थी मनुष्य वा जाति ऐसी अवस्था में चुप नहीं हो बैठती किन्तु अधिकतर परिश्रम और पुरुषार्थ करके उस निराशाजनक अभाव को पूरा करती है, जिस से उसको और देश को लाभ पहुँचता है।

अत्यन्त हर्ष का विषय है कि हमारे देश में जीवन के चिह्न दिखलाई देने लगे हैं और ऐसी २ परीक्षाएं होने लगी हैं; जिन में शिक्षा का माध्यम "हिन्दी" रक्खा है। वर्नाक्यूलर तथा अँगरेज़ी के मिडिल कक्षा तक की शिक्षा हमारी मननशीला सरकार ने वर्नाक्यूलर में करदी है। गुरुकुल व ऋषिकुल आदि में भी माध्यम "हिन्दी" ही का रक्खा है। हिन्दी-साहित्य सम्मेलन ने प्रथमा मध्यमा आदि परीक्षाओं में माध्यम हिन्दी का ही रक्खा है इत्यादि इत्यादि।

उपरोक्त हर्षदायक चिह्नों ने मेरे मन में उत्कराठा उत्पन्न की और मुझे साहस दिया कि मैं भी अपनी शक्ति अनुसार कुछ साहित्य सेवा करके उऋण हो जाने का प्रयत्न करूँ। अतएव मैंने इस "**सरल बीज गणित**" प्रथम भाग को आपके सामने रखने की ढीठता की है—ढीठता इसलिये कि पुस्तक उपरोक्त परीक्षाओं के निमित्त बहुत ही अपूर्ण और अलाभदायक प्रतीत होती है। परन्तु मुझे आपके गम्भीरमन और विशालहृदय से पूर्ण आशा है कि आप इस की त्रुटियों को क्षमा करेंगे। और मेरी इस भेंट को स्वीकार कर अनुगृहीत करेंगे।

हिन्दी में बीजगणित की कितनी पुस्तकें हैं इसपर विचार करने में हृदय दुखता है। श्रीमान् बापूदेव शास्त्रीजी अपनी बीज गणित की भूमिका में लिखते हैं कि यद्यपि भारतवर्ष में बीज गणित के विद्वान् व प्रचारक सबसे प्राचीन थे और भारतवर्ष

से ही यह विद्या सम्पूर्ण पृथ्वी पर प्रचलित हुई। परन्तु यह उन को मानना पड़ता है कि आजकल (उनके समय में) श्रीमान् भास्कराचार्य की बीजगणित के अतिरिक्त कोई बीजगणित नहीं मिलती है। उन्होंने अपनी बीजगणित में पश्चिमीय तथा पूर्वीय बीजगणित को मिलाने का प्रयत्न किया है।

अत्यन्त खेद होता है जब आजकल श्रीमान् भास्कराचार्य की बीजगणित भी प्रायः नहीं मिलती। और हम केवल माननीय बापूदेव शास्त्रीजी की बीजगणित का ही अवलोकन कर सकते हैं।

परन्तु मेरी सम्मति में शास्त्री जी की बीजगणित आज कल के हिन्दी संसार के लिये उपयोगी नहीं है। बहुत काल के अंधकार से और संस्कारों के प्रबल प्रभाव से हमारे मन से बीज गणितीय सिद्धान्तों के अंकुर प्रायः निकल गये हैं और जो कुछ हम जानते हैं वह आँग्लभाषा द्वारा ही प्राप्त किया है इस लिये केवल हिन्दी जानने वाले शास्त्रीजी की बीजगणित को प्रायः कठिन प्रतीत करेंगे। अतः मैंने अपनी इस पुस्तक में बीजगणितीय सिद्धान्तों की व्याख्या करने और उनके अंकुर पाठकों के मन में जमाने की चेष्टा की है। यदि मेरी यह इच्छा सफल हुई तो मैं अपने को कृतार्थ समझूँगा।

अन्त में मैं यह अवश्य निवेदन करना चाहता हूँ कि मैंने इस पुस्तक में कोई नई बात नहीं लिखी है किन्तु जो कुछ बीजगणित

हाईस्कूलों के नीचे की कक्षाओं में पढ़ाई जाती है उसीको हाई-स्कूलों में प्रचलित पुस्तकों के आधार पर हिन्दी भाषा में लिखी है। हां ! यह पुस्तक किसी पुस्तक का अनुवाद नहीं है।

जो महाशय त्रुटियों से मुझे सूचित करेंगे उनका मैं अनुग्रहीत हूंगा और त्रुटियों को दूर करने का प्रयत्न करूँगा।

—पीतमलाल

सरल बीज गणित

प्रस्तावना

प्रक्रम १. परिमाण, माप और इकाई। हम विद्यार्थी की ज्ञात वस्तुओं के उदाहरण देकर समझाने का प्रयत्न करेंगे कि इकाई और किसी वस्तु के माप तथा परिमाण से क्या अभिप्राय है।

(१) यदि हम अपने कमरे की लम्बाई जानना चाहते हैं तो हम यह मालूम करते हैं कि यह कमरा लम्बाई में उस लम्बाई से कै गुना है जो कौहनी से बीच की अंगुली के किनारे तक है और जिसको एक हाथ बोलते हैं।

(२) यदि हम अनाज की एक राशि का बोझ जानना चाहते हैं तो हम यह मालूम करते हैं कि उक्त राशि का बोझ उस बोझ से जिसको नियत कर रखा है और जिसको धड़ा कहते हैं कै गुना है।

(३) यदि हम रुपयों की एक थैली का मूल्य जानना चाहें तो हम यह मालूम करते हैं कि उस थैली में वह वस्तु जिस को हम एक रुपया कहते हैं कितनी बार शामिल है।

ऊपर के उदाहरणों से यह विदित होता है कि जब कभी हम एक वस्तु को मापना चाहते हैं तो हम केवल यह जानना चाहते हैं

कि वह वस्तु उसी प्रकार की एक छोटीसी वस्तु से कितनी गुनी है। वह छोटी वस्तु जिसको ऐसे अभिप्राय के लिये हम चुनलेते हैं इकाई कहलाती है। और वह संख्या जिससे यह विदित होता है कि इकाई से नापी जाने वाली वस्तु इतने गुनी है उस वस्तु का माप कहलाता है।

ऊपर के उदाहरणों में से पहिले उदाहरण में 'हाथ' एक इकाई है। दूसरे उदाहरण में 'घड़ा' और तीसरे में 'रुपया' एक इकाई है।

यदि हमारे कमरे की लम्बाई एक हाथ से २० गुनी है तो हम कहेंगे कि कमरे का परिमाण लम्बाई में २० हाथ है और उसका माप जब कि इकाई एक हाथ है, २० है।

ठीक इसी प्रकार यदि अनाज की राशि एक मन से ५० गुनी है तो राशि की तोल अर्थात् परिमाण ५० मन और उसका माप ५० हुआ और इकाई १ मन। और यदि थैली में २५० गुने एक रुपया है तो उसका माप २५० परिमाण २५० रुपया और इकाई १) रुपया है।

२. याद रखना चाहिये कि यदि हम एक वस्तु को इस प्रकार मापें कि इकाइयाँ भिन्न हों तो उस का माप भी भिन्न होगा। जैसे यदि इकाई एक हाथ हो और कमरे की लम्बाई ४० हाथ हो तो उसी कमरे की लम्बाई २० गज़ होगी जबकि इकाई १ गज है।

३. उदाहरण १–यदि लम्बाई की इकाई एक गिरह हो तो ५ गज और एक हाथ का क्या माप होगा ?

५ गज़ के १६ × ५ अथवा ८० गिरह हुए और एक हाथ के ८ गिरह हुए। इसलिए ५ गज़ १ हाथ के ८० + ८ = ८८ गिरह हुए और माप ८८ हुआ।

उदाहरण २—यदि तोल की इकाई २३ सेर ५ छटाँक हो तो १६ मन १२$\frac{३}{४}$ सेर का क्या माप होगा ?

२३ सेर ५ छटाँक = २३ × १६ + ५ = ३७३ छटाँक

और १६ मन १२$\frac{३}{४}$ सेर = १६ × ४० + १२$\frac{३}{४}$ सेर

= ६५२$\frac{३}{४}$ सेर

= ६५२$\frac{३}{४}$ × १६ छटाँक

= १०४४४ छटाँक

∴ ३६ मन १२$\frac{३}{४}$ सेर का माप = १०४४४ ÷ ३७३

= २८ हुआ.

नियमः—

$$\text{इकाई} = \frac{\text{परिमाण}}{\text{माप}}; \quad \text{माप} = \frac{\text{परिमाण}}{\text{इकाई}};$$

$$\text{परिमाण} = \text{माप} \times \text{इकाई}$$

अभ्यास १

१ यदि तोल की इकाई एक सेर हो, तो ४ मन ३५ सेर का क्या माप होगा ?

२ यदि इकाई १ मिनट हो तो १ घंटा ३५ मिनट का क्या माप होगा ?

३ यदि इकाई ५ सेर हो तो २५ सेर का क्या माप होगा ?

४ यदि ३०० फ़ीट का माप ५० हो तो इकाई क्या होगी ?

५ यदि ४०० गज का माप २५ हो तो इकाई क्या होगी ?

६ यदि १००) रु. की रक़म का माप १६ हो तो १२५) रु. का क्या माप होगा ?

७ यदि २०॥=) को ५$\frac{१}{३}$ से प्रगट करें तो ४५) को कितने से प्रगट करेंगे, यदि यह इकाई पहली इकाई का $\frac{१}{३}$ है ?

८ यदि १९ हंडरेडवेट २ कारटर का माप २७३ हो तो १ टन का माप क्या होगा जबकि यह इकाई पहली इकाई का सोलहवाँ भाग हो ?

९ यदि ७५ गज़ का माप ९०० हो तो १८$\frac{१}{२}$ गज़ का क्या माप होगा जबकि यह इकाई पहली इकाई से ५$\frac{३}{७}$ गुनी है ?

१० यदि २६ दिन, १० घंटा और २६ मिनट को १२० से प्रगट करें, तो एक वर्ष जिसमें ३६६ दिन हैं कितने से प्रगट करेंगे जबकि नई इकाई पहली इकाई से ४७ मिनट १३ सेकिन्ड कम है ?

११ यदि प्रश्न १० में इकाई पहली इकाई से ६ घंटा ५४ मिनट ४७ सेकिन्ड से बड़ी है तो कितने से प्रगट करेंगे ?

परिभाषा (क)

४. **बीजगणित:**—अंकगणित की तरह बीजगणित भी संख्याओं की विद्या है केवल इतना भेद है कि बीजगणित में संख्याओं को अक्षरों में और अंकगणित में अंकों में लिखते हैं ।

उदाहरण—अंक-गणित में ३ × ४ सदा १२ ही होते हैं, परन्तु बीज गणित में ३ × अ का मूल्य (जिस को संक्षेप से ३ अ भी लिख लेते हैं) अ के मूल्य पर निर्भर है। अ का मूल्य भिन्न होने से ३ अ का मूल्य भिन्न हो जाता है।

जैसे यदि अ = ४, ३ अ = ३ × ४ = १२

यदि अ = ५, ३ अ = ३ × ५ = १५

यदि अ = ११, ३ अ = ३ × ११ = ३३

इस उदाहरण से यह भेद भली भांति समझ लेना चाहिये कि अंक गणित के ३, ५, इत्यादि किसी चिह्न का मूल्य घट बढ़ नहीं सकता है और वह नियत है परन्तु इसके विरुद्ध बीज गणित के किसी चिह्न अ इत्यादि का मूल्य कुछ ही हो सकता है अर्थात् घट बढ़ सकता है।

चिह्न:—अक्षरों को जो संख्याओं के स्थान में लिखे जाते हैं तथा धन और ऋणादि के चिह्नों को चिह्न कहते हैं। जैसे अ, क, य, ×, ÷ इत्यादि में से प्रत्येक चिह्न है।

परिमाण:—कोई वस्तु, जिसकी संख्या होसके, परिमाण कहलाती है। जैसे समय, बोझ, रुपया, दूरी इत्यादि की संख्या (गणना) हो सकती है इस लिये इन में से प्रत्येक परिमाण है।

भिन्न अथवा अभिन्न संख्या को भी परिमाण कहते हैं।

बीज गणित में मान को भी परिमाण कहते हैं।

पद-मान—अक्षरों और चिह्नों के सार्थक संयोग को "मान"

कहते हैं और उस मान के प्रत्येक भाग को "पद" कहते हैं। जैसे ४ अ + २ ब—स, एक मान है और ४ अ, २ ब, और स, में से प्रत्येक को पद कहेंगे।

केवल पद अथवा **साधारण मान**:—यदि किसी मान में केवल एक ही पद है तो उसे "साधारण मान" अथवा "केवल पद" कहते हैं। जैसे ३ अ, क इत्यादि

मिश्रित मान अथवा **संयुक्त पद**:—यदि किसी मान में दो अथवा अधिक पद हैं तो उसको 'मिश्रित मान' अथवा 'संयुक्त पद' कहते हैं जैसे ३ अ + २ क, २ अ – ४ ब + ३ क, इत्यादि

५. मान के पद के अनुसार और भी भाग किये गये हैं।

(१) एक पद (२) द्विपद (३) त्रिपद (४) बहुपद

(१) एक पद-मान:-"एक पद मान" अथवा "साधारण मान" उस मान को कहते हैं जिस में केवल एक पद हो। जैसे ३ अ

(२) द्विपद मान उस मान को कहते हैं जिस में दो पद हों। जैसे ३ अ + २ क

(३) त्रिपद मान उस मान को कहते हैं जिसमें ३ पद हों। जैसे २ अ – ४ ब + ३ क

(४) बहु पद-मान उस मान को कहते है जिस में तीन अथवा अधिक पद हों। जैसे २अ – ४ब + ३ क, ३ अब + ५क + ७ खग + य, इत्यादि।

नोट—बीज गणित के चिह्नों के बीच में (×) गुणा का चिह्न बहुधा छिपा रहता है। जैसे ३ अब से अभिप्राय ३ × अ × ब है।

गुणावयव:—यदि दो या अधिक संख्याओं का गुणनफल एक दी हुई संख्या के बराबर हो तो प्रत्येक संख्या को गुणनफल का गुणावयव कहते हैं।

जैसे ३ × ५ × ७ = १०५, तो ३, ५, ७ में से हर एक १०५ का **गुणावयव** है। यह उदाहरण अंकगणित का हुआ-

बीजगणित का उदाहरण-३ × अ × ब × क = ३ अबक, तो ३, अ, ब, और क में से प्रत्येक ३ अबक का गुणावयव है।

गुणक:-किसी गुणनफल के, जिसमें दो अथवा अधिक गुणावयव हैं, किसी एक अवयव का शेष भाग को गुणक कहते हैं।

जैसे ३ × ७ = २१ इस में ३ का गुणक ७ और ७ का गुणक ३ है। इसी प्रकार अब में अ का गुणक ब और ब का गुणक अ है। और क × ख × ग में क का गुणक खग, ख का कग, और ग का खक है और खग का गुणक क, कग का ख तथा कख का गुणक ग है।

यदि किसी गुणनफल के अवयवों में से एक अवयव अंक है तो उसको शेष अवयवों के गुणनफल का अंकात्मक गुणक कहते हैं। जैसे १२ कखग में १२, कखग का "अंकात्मक गुणक" है।

७. *उदाहरण १:—यदि अ = २, ब = ३, स = ४*

तो ५ अ+८ब+९ स का मूल्य बताओ ?

५ अ = ५ × अ = ५ × २ = १०

८ ब = ८ × ब = ८ × ३ = २४

९ स = ९ × स = ९ × ४ = ३६

∴ ५अ + ८ब + ९स = १० + २४ + ३६ = ७० उत्तर

उदाहरण २:-यदि अ = ५, ब = ६ और स = ३

तो ६ अ − ७ब + ५ स का मूल्य बताओ ?

६ अ = ६ × अ = ६ × ५ = ३०

५ स = ५ × स = ५ × ३ = १५

−७ब = − ७ × ब = ७ × ६ = − ४२

∴ ६अ − ७ब + ५ स = ३० − ४२ + १५

= ४५ − ४२ = ३ उत्तर

उदाहरण ३:-यदि अ = ९, ब = ४, स = ११ और द = ५

तो ८अ ÷ ३ब × ५स ÷ द का मूल्य बताओ ?

$$\text{८ अ} \div \text{३ ब} \times \text{५ स} \div \text{द} = \text{८अ} \times \frac{\text{१}}{\text{३ब}} \times \text{५स} \times \frac{\text{१}}{\text{द}}$$

$$= \frac{\text{८अ}}{\text{३ ब}} \times \frac{\text{५स}}{\text{द}} = \frac{\text{८} \times \text{९}}{\text{३} \times \text{४}} \times \frac{\text{५} \times \text{११}}{\text{५}}$$

= २ × ३ × ११ = ६६ उत्तर

उदाहरण ४:—यदि अ = १, ब = २, स = ३, द = ४ य = ५ फ = ० तो

अबस − द ÷ ब × अ + दयफ + ब ÷ अ × स − द ÷ बस का मूल्य बताओ ?

इस मान में ५ पद हैं हम प्रत्येक पद का अलग २ मूल्य निकाल कर प्रश्न का उत्तर निकालेंगे ।

प्रथम पद अबस = अ×ब×स = १ × २ × ३ = ६

द्वितीय पद, −द ÷ ब × अ = $-\frac{\text{द}}{\text{ब}}$ × अ = $-\frac{४}{२}$ × १ = −२

तृतीय पद, दयफ = द × य × फ = ४ × ५ × ० = ०

चतुर्थ पद, ब ÷ अ × स = $\frac{\text{ब}}{\text{अ}}$ × स = $\frac{२}{१}$ × ३ = ६

पंचम पद, −द ÷ बस = $-\frac{\text{द}}{\text{ब} \times \text{स}}$ = $-\frac{४}{६}$ = $\frac{२}{३}$

∴ मान का मूल्य = ६ − २ + ० + ६ − $\frac{२}{३}$

= १२ − २$\frac{२}{३}$ = ९$\frac{१}{३}$ उत्तर

अभ्यास २

यदि अ = २, ब = ३, स = ६, तो नीचे लिखे हुए मानों का संख्या में मूल्य बताओ ?

१ स − अब

२ अ + स ÷ ब

३ स ÷ अब

४ स − ब ÷ अ

५ स − ब ÷ अ + स ÷ ब

६ स ÷ ब ÷ २अ

७ ४ अब − स ÷ ४अ + ब ÷ २ अ

८ ६४ ÷ सब + ३० × अ ÷ बस

९ ५ अ + ३ स × २ ब ÷ ६अ − ७ब

१० १० स ÷ अब × २ + ३२ब ÷ २ अस + १५स ÷ ३ ब × स ÷ ५

११. ४८ स ÷ ब + अ × ७ ÷ ४ ब − ३ स ÷ ३ ब ÷ ४ × ३ ÷ अ × ८

१२. यदि अ = ७, ब = २; स = ५ और द = १
तो अ + ५ ब − स + १३ द का मान निकालो ?

१३. यदि अ = ५, ब = ४; स = ३ और द = २
तो अ + २ ब − स + २ द का मान बताओ ?
यदि अ = १; ब = २, स = ३; द = ४; य = ५, फ = ०

१४. तो ९ अ + २ ब + ३ स − २ फ का मूल्य बताओ ?

१५. तो ४ य − ३ अ − ३ ब + ५ स का मान निकालो ?

१६. तो ८ अबस − बसद + ९ सदय − दयफ का मूल्य बताओ ?

१७. यदि अ = ४, ब = ३, क = २, ख = ५, ग = ६ और घ = १
तो अख − २ बग + ८ कघ का मान बताओ ?

१८. यदि क = ६; ख = ५; ग = ३ और घ = २
तो कखग − कखघ + कगघ − खगघ का मूल्य निकालो ?

१९. यदि क = २; ख = ७; ग = ४; और घ = ५
तो कघ + कख − गघ + गख का मूल्य बताओ ?
यदि क = २; ख = ३; ग = ४; घ = ५ और र = ६

२०. तो $\frac{४क}{ग} + \frac{९ख}{क} + \frac{कग}{र} - \frac{५घ}{६}$ का मान निकालो ?

२१. तो $\frac{रघ}{ग} + \frac{५ख}{क} - \frac{गर}{क}$ का मान निकालो ?

परिभाषा (ख)

८. **घात** अथवा **सामर्थ्य:**—यदि किसी संख्या या मान को उसी संख्या या मान से एक या कई बार गुणा करें तो प्राप्त फल को उस संख्या या मान का 'घात' अथवा 'सामर्थ्य' कहते हैं।

जैसे अ × अ या अअ को अ का वर्ग (द्वितीय सामर्थ्य) कहते हैं। अ अ अ को घन (तृतीय सामर्थ्य), तथा

अअअअ को चतुर्थ सामर्थ्य कहते हैं इत्यादि

अ अ को संक्षेप से अ^{२}, अ अ अ को अ^{३}, तथा अ अ अ अ को अ^{४} संक्षेप से लिखते हैं।

इसलिए अ^{६} का अर्थ अ की छठी सामर्थ्य है।

"घात मापक" वा **"शक्ति":**-यदि किसी संख्या या मान को उसी से कई बार गुणा करें तो जितनी बार गुणा करते हैं वह संख्या उस मान की 'शक्ति' कहलाती है।

यह अंक उस संख्या या मान के ऊपर थोड़ा दाहिनी ओर को हटा कर लिखते हैं। जैसे अ^{७}, (३अ + ५क − २लर)^{५} इन उदाहरणों में ७ और ५ शक्ति कहलाते हैं।

वर्ग:—किसी परिमाण की द्वितीय सामर्थ्य को उस परिमाण का 'वर्ग' कहते हैं। जैसे अ^{२}, (अ-ब)^{२}

घन:—किसी परिमाण की तृतीय सामर्थ्य को उस परिमाण का 'घन' कहते हैं। जैसे अ^{३}, (अ-क)^{३}

नोट:—अ^{१} और अ इन दोनों का एक ही अर्थ है। अर्थात्

किसी परिमाण की प्रथम शक्ति प्रायः छिपी रहती है लिखी नहीं जाती है।

वर्गमूलः—किसी संख्या या परिमाण का वर्गमूल वह संख्या या परिमाण है जिस को उसी से गुणा करने, अर्थात् वर्ग करने से वही संख्या या परिमाण आ जावे।

$\sqrt{\ }$ यह वर्गमूल का चिह्न है।

जैसे $\sqrt{४९}=७$ क्योंकि $७\times७=७^{२}=४९$

इसी प्रकार $\sqrt{२५अ^{२}} = ५ अ$

और $\sqrt{(१६अ^{२}+४०अब+२५ब^{२})} = (४अ+५ब)$

घनमूलः—किसी संख्या या परिमाण का घनमूल वह संख्या या परिमाण है जिस का घन वही संख्या या परिमाण हो।

जैसे $\sqrt[३]{२७}=३$ क्योंकि $३^{३}=२७$

इसी कार $\sqrt[३]{८अ^{३}}=२ अ$

नोटः—$\sqrt[३]{\ }$ यह घनमूल का चिह्न है।

इसी प्रकार किसी संख्या या परिमाण का चतुर्थमूल, पंचम-मूल, इत्यादि वह संख्या या परिमाण है जिस की चतुर्थ, पंचम सामर्थ्य इत्यादि वही संख्या या परिमाण हो। चतुर्थ मूल का चिह्न $\sqrt[४]{\ }$, पंचममूल का चिह्न $\sqrt[५]{\ }$, और इसी प्रकार क वें मूल का चिह्न $\sqrt[क]{\ }$ है।

करणीः—यदि किसी संख्या या परिमाण का मूल पूरा२ न निकल सके तो उसको करणीगत संख्या कहते हैं; और उस मूल के

चिह्न को करणी कहते हैं। जैसे √७ एक कर्णागत संख्या और √ करणी है।

यदि हम ७ का वर्गमूल अंकगणित के नियमानुसार निकालना चाहें तो हम दशमलव भिन्न में चाहे जितने स्थान तक वर्गमूल निकाल सकते हैं। परन्तु बीजगणित में हम ऐसा वर्गमूल नहीं निकालते और ७ का वर्गमूल √७ ही रख लेते हैं। अर्थात् वह संख्या जिसका वर्ग असली संख्या आजावे।

९. चिह्न = प्रगट करता है कि दो परिमाण जिन के बीच में चिह्न है बराबर हैं। जैसे अ = ब

चिह्न > प्रगट करता है कि वह परिमाण, जो इसके बाईं ओर है, दाहिनी ओर लिखे जानेवाले परिमाण से बड़ा है। जैसे अ > ब का अभिप्राय यह है कि अ, ब से बड़ा है। चिह्न < प्रगट करता है कि वह परिमाण जो इसके बाँई ओर है दाहिनी ओर लिखे जानेवाले परिमाण से छोटा है। जैसे अ < ब का अभिप्राय यह है कि अ, ब से छोटा है।

यदि हम इन चिह्नों में से किसी को तिरछी रेखा से काट दें, तो अर्थ उलटा हो जाता है। जैसे अ ब, अ ब, अ ब का क्रमशः अ, ब के बराबर, बड़ा छोटा नहीं है यह अर्थ है।

चिह्न ∵ चूँकि अथवा क्योंकि के स्थान में लिखा जाता है।

चिह्न ∴ इसलिये अथवा अतः शब्द के स्थान में लिखा जाता है।

१०. कोष्ठ—जब हम को यह प्रगट करना होता है कि एक

मान को पदों सहित एक ही बर्तना चाहिये, तो उस मान को कोष्ठ (अथवा बन्धनी) में बन्द कर देते हैं, जैसे (अ + ब) स का अर्थ है कि पहिले अ और ब का योग निकालना चाहिये; और फिर योग को स से गुणा करना चाहिये। इसी प्रकार (अ - ब) (स + द) का अर्थ यह है कि अ और ब के अन्तर को स और द के योग से गुणा करना चाहिये। कोष्ठ या बन्धनी कई प्रकार की होती है—

(१) ( ) (२) { } (३) [ ]

कभी कभी कोष्ठ के स्थान में एक सरल रेखा, जिसको "शृङ्खला" कहते हैं, मान के उस भाग के ऊपर खींच देते हैं, जिसको कोष्ठ में बन्द करना चाहते हैं। जैसे अ-$\overline{\text{ब} - \text{स}}$ का अर्थ अ-(ब-स) है।

और $\sqrt{\text{अ}+\text{ब}}$ और $\sqrt{}$ (अ + ब) का एक ही प्रयोजन है।

नोट १—यह ध्यान रखना चाहिये कि जब वर्गमूल का चिह्न बिना शृंखला के लगाया जाता है। तो वर्गमूल का चिह्न उसी अंक अथवा अक्षर के ऊपर समझना चाहिये, जो चिह्न के पीछे हो। जैसे $\sqrt{\text{२}}$ अ का अर्थ यह है कि २ का वर्गमूल निकालकर उसको अ से गुणा करो। इसके विपरीत $\sqrt{\text{२ अ}}$ का अर्थ यह है कि २ और अ के गुणनफल का वर्गमूल निकालो।

नोट २—पाठकों को इस बात पर विशेष ध्यान देना चाहिये कि बीजगणित में किसी मान के प्रत्येक पद को ऐसा समझना चाहिये मानो वह कोष्ठ में बन्द है। जैसे क + अब - स ÷ द का

अभिप्राय यह है, कि पहिले अ और ब का गुणा करो। गुणनफल में क जोड़ो। योग में से स और द के भजनफल को घटाओ। अर्थात् संक्षेप से ऊपर का मान क+(अ × ब)—(स ÷ द) के बराबर है।

११. **सम और विषमपद्**—यदि किसी मानमें दो अथवा अधिक पद ऐसे हों, जिनमें केवल अंकात्मक गुणक में ही भिन्नता हो तो ऐसे पदों को '**समपद्**' कहते हैं अन्यथा '**विषम पद्**'। जैसे १६ अ $ब^२$-७$अ^२$ब + ९ अ ब स - ११ अ $ब^२$ इस मानमें १६ अ $ब^२$ और-११ अ $ब^२$ सम पद हैं, क्योंकि इन पदों में भिन्नता केवल १६ और-११ अङ्कात्मक गुणकों में ही है। शेष भाग एक है परन्तु-७$अ^२$ ब, ९ अबस, यह विषम पद हैं।

अभ्यास ३

यदि अ = १, ब = २, स = ३, द = ४, क = ५ तो नीचे लिखे मानों का मूल्य बताओ ?

१. २६अ-३ ब स + द।

२. अ ब + ३ ब स-५ द।

३. ब स द + स द अ + द अ ब + अ ब स।

४. $\frac{१६}{५}$अ स क।

५. $\frac{२ब}{अ}$

६. $\frac{४}{२७}$ $अ^३$ $स^३$द

नीचे लिखे मानों का मूल्य बताओ जब $अ = ३$, $ब = २$, $स = १$ और $द = ०$?

७. $(३अ + ४द)\,(२ब - ३स)$

८. $२अ^{२} - (ब^{२} - ३स)^{२}\,द$

९. $अ^{३} - ब - २\,(अ - ब + स)^{३}$

१०. $अ\,(ब^{२} - स^{२}) + ब\,(स^{२} - द^{२}) + द\,(अ^{२} - म^{२})$

११. $३\,(अ + ब)^{२}(स + द) - २(ब + स)^{२}(अ + द)$

१२. $\frac{२अ^{२}}{ब + स} - \frac{२ब^{२}}{स + अ} - \frac{२म^{२}}{ब + द} + \frac{२द^{२}}{अ + ब}$

१३. यदि $अ = ५$, $ब = ४$, $स = ३$, तो मूल्य बताओ ?

$\sqrt{अ^{२} - ब^{२}}$, $\sqrt{२अब + स}$, $\sqrt{(ब^{४}स^{२} + ब^{२}स^{४})}$

और $\sqrt[३]{अ^{२} + ४ब^{२} + ४स^{२}}$ का

१४. दिखलाओ कि $अ^{२} - ब^{२} = (अ + ब)\,(अ - ब)$ जब कि

(१) $अ = २$, $ब = १$

(२) $अ = ५$, $ब = ३$

(३) $अ = १२$, $ब = ५$

१५. साबित करो कि $अ^{३} - ब^{३}$, $(अ - ब)\,(अ^{२} + अब + ब^{२})$

$(अ - ब)^{३} + ३अब\,(अ - ब)$, और

$(अ + ब)^{३} - ३अब\,(अ + ब) - २ब^{३}$

सब का मूल्य बराबर है यदि (१) $अ = ३$, $ब = २$

(२) $अ = ५$, $ब = १$

(३) $अ = ६$, $ब = २$

१६. यदि क = ५, ख = ४, ग = ३, और घ = २

तो $\frac{क + ख - (ग - घ)}{क + ख - ग - घ}$ का मूल्य बताओ ?

१७. यदि य = ६, और र = ३

तो $य^२ + ३ य र - ५ र^२$ का मान निकालो ?

१८. यदि क = ९ और ख = ४

तो $(क + ख)^२ - (क^२ + क ख + ग^२)$ का मूल्य बताओ ?

१९. यदि क = ३ और ख = १

तो $\frac{क^२ + ख^२}{क - ख} - \frac{क^२ - ख^२}{क + ख}$ का मूल्य निकालो ?

२०. यदि य = ३ अथवा $\frac{१}{३}$, तो सिद्ध करो कि

$३ य^२ - १० य + ३ = ०$

२१. यदि य = ५ अथवा $\frac{१}{५}$, तो सिद्ध करो कि

$५ य^२ - २८ य + ५ = ०$

२२. यदि क = ४, ख = ३,

तो $(क^२ + ख क + ख^२)(क - ख)$ का मान बताओ ?

२३. यदि क = ५ और ग = ३

तो $\sqrt{\frac{क^३ + ग^३}{क + ग}} + २ ग$ का मान बताओ ?

२४. यदि य = ३, र = २, और ल = १

तो $य^३ + र^३ + ल^३ + ३ य र (य + र) + ३ य ल (य + ल)$

$+ ३ र ल (र + ल) + ६ य र ल$ का मान बताओ ?

२५. यदि क = २, ख = १३ और ग = ५

तो $\text{क}\sqrt[3]{(\text{ख}-\text{ग})^{2}}-\sqrt{\text{क}(\text{ख}+\text{ग})}$ का मूल्य बताओ।

ऋणात्मक परिमाण

१२. जिस परिमाण के पहिले + चिह्न लिखा हुआ, अथवा छिपा हुआ हो, तो उस परिमाण को 'धनात्मक' परिमाण कहते है। जैसे + ७ अ, ५ क इत्यादि।

जिस परिमाण के पहिले (—) चिन्ह (लिखा हुआ) हो उस परिमाण को 'ऋणात्मक' परिमाण कहते हैं। जैसे — ७ अ

यदि हम कहें कि ३ में से ५ घटाओ, तो यह असम्भव प्रतीत होता है, और मन में प्रश्न उत्पन्न होता है कि किसी छोटी संख्या में से एक बड़ी संख्या किस प्रकार घट सकती है ?

इसलिये अंकगणित में ३–५ का कुछ अर्थ नहीं है, और यह एक असम्भव बात है। परन्तु बीजगणित में धन और ऋण के अर्थों को विस्तृत करने से ३–५ का अर्थ सम्भव हो जाता है।

'धन'—बीजगणित में धन का अर्थ वृद्धि है धन नहीं। जैसे यदि किसी मनुष्य के पास १०) रु० हैं और उसके पास ३) रु० और आगये तो + ३) रु० का अर्थ यह होगा कि उस मनुष्य के धन में ३) रु० की वृद्धि हुई, १०) + ३) = १३) नहीं, अर्थात् वृद्धि होने से पहिले धन कुछ ही हो, और पश्चात् कुछ ही हो जावे, इससे कुछ अभिप्राय नहीं। + ३ का अर्थ केवल यह है कि धन में ३) रु० की 'वृद्धि' होगई। इसी प्रकार-५) रु०

का अर्थ यह है कि उस मनुष्य के धन में ५) रु० का घाटा हुआ। घाटा होने के पहले अथवा पश्चात् उसका धन कुछ ही क्यों न हो।

यदि हम इन दोनों बातों को मिला दें तो ३) − ५) का अर्थ यह होगा कि एक मनुष्य के धन में ३ रु० की वृद्धि हुई, और ५ रु० का घाटा हुआ। अर्थात् अन्त में २) रु० का घाटा हुआ। इस लिये + ३)−५) = −२)

अतः हमको ज्ञान हुआ कि यद्यपि अंकगणित में ३−५ का कुछ अर्थ नहीं होता है, परन्तु बीजगणित में उसका अर्थ २) रु० के घाटा अथवा '−' से है। ठीक इसी प्रकार ५−३ का अर्थ यह है कि ५ की वृद्धि और ३ का घाटा हुआ, अर्थात् अन्त में २ की वृद्धि रही। इसलिये ५−३ = २

यह बात तो स्पष्ट है ही, कि यदि उस मनुष्य को पहिले ५) रु० का घाटा हो और फिर ३) रु० की वृद्धि हो, तो भी फल २) रु० का घाटा ही हुआ अर्थात् −५ + ३ = −२. इसी प्रकार यदि उसको पहिले ३) रु० का घाटा हो और फिर ५) रु० की वृद्धि हो तो भी फल २) रु० की वृद्धि ही हुई। −३ + ५ = २

इन सब बातों को हम बीजगणित रूप में इस प्रकार भी लिख सकते हैं।

५−३ = २   ३−५ = −२

−३ + ५ = २   −५ + ३ = −२

१३. **दूसरा उदाहरण**—मानलो कि एक मनुष्य का स्थान एक सड़क के किनारे है जिसकी दिशा उत्तर दक्षिण है।

अब यदि वह मनुष्य अपने स्थान से १० कोस की दूरी पर हुआ और यदि वह ७ कोस दक्षिण को चले तो, अपने स्थान से केवल ३ कोस की दूरी पर उत्तर दिशा में रह जावेगा। इस बात को बीजगणित में इस प्रकार लिख सकते हैं

$$+१०-७=+३$$

यह बात तो स्पष्ट है, कि यदि वह मनुष्य पहिले ७ कोस दक्षिण को चलता, और फिर १० कोस उत्तर को चलता तो भी अन्त में अपने स्थान से ३ को उत्तर को होता। अर्थात्

$$-७+१०=+३$$

यदि वह मनुष्य पहिले ७ कोस उत्तर चले, और फिर १० कोस दक्षिण को चले, तो वह अपने स्थान से ३ कोस की दूरीपर दक्षिण दिशा में (अर्थात् उलटी दिशा में) होगा। इस को गणित में इस प्रकार लिखेंगे।

$$७-१०=-३$$

यह बात भी स्पष्ट है, कि यदि वह मनुष्य पहिले १० कोस दक्षिण को चलता और फिर ७ कोस उत्तर को, तो भी अन्त में अपने स्थान से ३ कोस दक्षिण में रहता। अर्थात्

$$-१०+७=-३$$

१४. ऊपर के उदाहरणों से यह स्पष्ट प्रतीत होता है, कि यदि किसी मनुष्य की आय, अथवा किसी स्थान से एक विशेष दिशा में दूरी को (+) चिह्न से प्रगट करें तो, उस के व्यय, अथवा उसी स्थान से बिल्कुल उलटी दिशा की दूरी को (−) चिह्न से

प्रगट करना चाहिये। क्योंकि आय, व्यय तथा उत्तर, दक्षिण इत्यादि एक दूसरे के विपरीत हैं।

अभ्यास ४

मूल्य बताओ ?

१. $११ - ७$ २. $४अ - २अ$

३. $-३ - २$ ४. $७ - ११$

५. $२अ - ४अ$ ६. $-२अ - ४अ$

७. $-५अब + २अब$ ८. $३अ^२ब - १२अ^२ब$

९. $-३अबस + ७अबस$ १०. $६क^२ - १५क^२$

यदि $अ = ०$, $ब = ४$, $स = ९$, $द = २५$

तो नीचे लिखे परिमाणों का मूल्य बताओ ?

११. $\sqrt{अब} - \sqrt{बस} + \sqrt{सद}$

१२. $\sqrt{\frac{अ}{ब}} + \sqrt{\frac{ब}{स}} + \sqrt{\frac{स}{द}}$

१३. $\sqrt{बसद} - \sqrt{असद} - ३\sqrt{२ब} + ३\sqrt{५द}$

१४. $ब\sqrt{सद} + अ\sqrt{बद} - ४\sqrt{बस} - ३\sqrt{६बस}$

१५. यदि $क = ७$ तो $२क^२ - २३क + ६३$ का मूल्य बताओ ?

१६. यदि $क = ३$ तो $२क^२ - \frac{८क}{५} - \frac{२६}{५}$ का मूल्य बताओ ?

१५. हम जानते हैं कि २ गाय + ५ गाय + ७ गाय = १४ गाय

इसी तरह $२ अ + ५ अ + ७ अ = १४ अ$

और २५ घोड़े - १० घोड़े + ६ घोड़े = २१ घोड़े। इसी प्रकार

$२५क - १०क + ६क = २१क$

इन उदाहरणों से यह नियम निकला, कि यदि बीजगणित का कोई ऐसा मान है, जिसके सब पद समपद हैं तो उसके सब पदों को एक ही पद में प्रगट कर सकते हैं।

परन्तु यदि एक मनुष्य के पास ७ घोड़े, ३ गाय, और ४ बछड़े हैं और वह एक घोड़े, गाय, अथवा १ बछड़े का मूल्य नहीं जानता है, तो वह ७ घोड़े + ३ गाय + ४ बछड़े का मूल्य भी नहीं जान सकता है।

इसी प्रकार यदि कोई ऐसा मान है जिसके सब पद विषम पद हैं, तो हम उसको सरल नहीं कर सकते हैं जब तक कि उन अक्षरों का मूल्य मालूम न हो।

जैसे ७अ + ३ब + ४स को सरल नहीं कर सकते हैं जब तक अ, ब, स का मूल्य मालूम न हो।

इन दोनों उदाहरणों से एक नियम निकला, कि बीजगणित के किसी मान में उसके समपदों को इकट्ठा करके, सरल कर सकते हैं, परन्तु विषम पद जैसे के तैसे ही रहेंगे और सरल नहीं हो सकते हैं।

१६. अंकगणित में ३ (५ + ४) = ३ × ९ = २७

अथवा ३ (५ + ४) = ३ × ५ + ३ × ४ = १५ + १२ = २७

ठीक इसी प्रकार बीजगणित के समपदवाले मान में भी

३ (५अ + ४अ) = ३ × ९अ + २७अ

अथवा ३ (५अ × ४अ) = ३ × ५अ + ३ × ४अ

= १५अ + १२अ = २७अ.

परन्तु यदि हम ३ (५अ + ४ब) को, जिसके पद विषम हैं सरल करना चाहें तो

३ (५अ + ४ब) = ३ × ५अ + ३ × ४ब = १५अ + १२ब, इस से अधिक सरल नहीं कर सकते हैं, जब तक 'अ' और 'ब' में से प्रत्येक का मूल्य मालूम न हो।

१७. उदाहरण:—४अ + ३ब − ५स − २अ + ७ब + १०स को सरल करो ?

४अ + २ब − ३स − २अ + ७ब + १०स

= ४अ − २अ + २ब + ७ब − ३स + १०स

समपदों को एकत्रित किया

= २अ + ९ब + ७स उत्तर

उदाहरण २—नीचे लिखे मान को सरल करो ?

३क^{२}ख − ४क^{३} − ४कख^{२} − ६क^{२} + २कख^{२} − ३क^{२}ख − ५क^{२} − ३क^{३} + ६ समपदों को एकत्रित करने पर, दिया हुआ मान

= ३क^{२}ख − ३क^{२} ख − ४क^{३} − ३क^{३} − ४कख^{२} + २ कख^{२}

− ६क^{२} − ५क^{२} + ६

= − ७क^{३} − २कख^{२} − ११क^{२} + ६

१८. अब हम कोष्ठ खोलने के दो बड़े नियमों को कहते हैं।

नियम १—यदि दो अथवा अधिक पद कोष्ठ के भीतर बन्द हों. और कोष्ठ के पहिले (+) चिह्न हो। तो कोष्ठ को उसके भीतर

के पदों से पहिले के चिह्नों*को बिना बदले हुए ही दूर कर देते हैं।

नियम २—यदि दो अथवा अधिक पद कोष्ठ के भीतर बन्द हों और कोष्ठ के पहिले (–) चिह्न हो तो कोष्ठ को खोलते समय उसके भीतर के पदों से पहिले के चिह्नों को बदल देते हैं।

१९. सिद्धि करो कि अ + (ब + स) = अ + ब + स ?

```
              अ          ब          स
      क.___________.___________.___________.___________
                   ख          ग          घ
```

एक सरल रेखा कघ लेली, उसमें से कख = अ, खग = ब और गघ = स के काट लिया।

तो अ + (ब + स) = कख + (खग + गघ)

= कख + खघ

= कख + खग + गघ

= अ + ब + स.

२०. सिद्धि करो कि अ + (ब – स) = अ + ब – स ?

```
         अ               ब      स
   क.________.________.________.______ल        चित्र सं. १
             ख        घ        ग
            अ        ब        स
 क.________.________.________.__________ल    चित्र सं. २
           घ        ख        ग
```

एक सरल रेखा 'कल' लेली। उसमें से कख = अ, और खग = ब के काट लिया। और ग से क की ओर (क्योंकि 'स' से

---

* पदों के पहिले के चिह्नों को बदलने का अर्थ यह होता है कि यदि पद के पहिले + हो तो – और यदि – हो तो + कर देना। जैसे ३अ – ब के चिह्न बदलने से – ३अ + ब हुआ।

पहिले — चिह्न है, देखो प्रक्रम १३.) गघ = स के काट लिया।

यह स्पष्ट है कि यदि 'स' 'ब' से छोटा है तो 'घ' ख और 'ग' के बीच में होगा जैसे चित्र सं. १ में।

और यदि 'स' 'ब' से बड़ा है तो 'घ' 'ख' और 'ग' से बाहर 'क' की ओर अर्थात् 'क' और 'ख' के बीच में होगा। जैसे चित्र सं. २ में।

अ + (ब — स) = कख + (खग - गघ)

= कख + खघ चित्र सं. १ में

= कख + घख चित्र सं. २ में

= कज + खग - घग

= अ + ब - स

∵ बीजगणित में पदों को चाहे जिस ओर से लिख सकते हैं

∵ ब-स = -स + ब

और अ + (ब — स) = अ + (- स + ब)

अ + ब — स = अ — स + ब

अतः एव उपरोक्त नियम १ सिद्धि होगया।

२१. सिद्धि करो कि (नियम सं. २ अनुसार)

अ - (ब + स) = अ - ब - स ?

इसको सिद्धि करने के लिये पहिले की भाँति एक सरल रेखा 'कख' लेली। और कख = अ के काटली

अ स ब

क.————————.——————.———— ख

घ म

'ख' से 'खग' और 'गघ' क्रम से ब और स के बराबर उलटी दिशा में काट लिये।

$\therefore$ अ − (ब + स) = कख − (गख + घग)

= कख − घख = कघ

= कख − गख − घग

= अ − ब − स

२२. सिद्ध करो कि अ − (ब − स) = अ − ब + स ?

अ स ब

क.————————.————————.————————ख

ग घ

पहिले की भाँति चित्र बना लिया।

$\therefore$ अ − (ब − स) = कख − (गख − गघ)

= कख − घख

= कघ

= कख − गख + गघ

= अ − ब + स

$\because$ बीजगणित में पद किसी क्रम से लिखे जा सकते हैं

$\therefore$ अ − (ब − स) = अ − (− स + ब)

= अ − ब + स = अ + स − ब

अतएव नियम २ भी सिद्ध होगया।

नोटः—चूँकि शृङ्खला भी एक प्रकार का कोष्ठ है; इसलिये शृङ्खला के लिये भी वह ही नियम हैं जो कोष्ठ के लिये हैं।

२३. हम जानते हैं कि अंकगणित में $\frac{७+५}{३} = \frac{७}{३} + \frac{५}{३}$ ठीक इसी भाँति बीजगणित में भी

$$\frac{७अ + ५ब}{३} = \frac{७अ}{३} + \frac{५ब}{३}$$

२४. **उदाहरण १—सरल करो।**

$६ + (क - २) - (३ + ४क) + (६क + १)$

दिया हुआ मान $= ६ + (क - २) - (३ + ४क) + (६क + १)$

$= ६ + क - २ - ३ - ४क + ६क + १$

$= ६ - २ - ३ + १ \times क - ४क + ६क$

$= २ + ३क$ उत्तर

उदाहरण २—सरल करो।

$३ (२अ - स) - ७ (स - ३अ) - ४ (५अ - २स)$

दिया हुआ मान $= ३ \times २अ - ३स - ७स + ७ \times ३अ - ४ \times ५अ + ४ \times २स$

$= ६ अ - ३ स - ७ स + २१ अ - २०अ + ८ स$

$= ६अ + २१ अ - २०अ - ३ स - ७ स + ८ स$

$= ७ अ - २ स$ उत्तर

उदाहरण ३ :–सरल करो $\frac{३क - ९}{३} + \frac{४क - १२}{२} - \frac{८क + १२}{४}$?

दिया हुआ मान $= \frac{३क}{३} - \frac{९}{३} + \frac{४क}{२} - \frac{१२}{२} - \frac{८क}{४} - \frac{१२}{४}$

$= क - ३ + २क - ६ - २ क - ३$

$= क + २ क - २ क - ३ - ६ - ३$

$= क - १२$ उत्तर

अभ्यास ५.

सरल करो ?

१. $९ - (३ - ४)$ २. $-७ + (-४ + ११)$

३. $६अ - (४अ - २अ)$ ४. $३अ^२ - (५अ^२ - ७अ^२)$

५. $-क^२ - (-३क^२) + (-५क^२)$

६. $-क^२ + (७क^२ - ६क^२)$

७. $क - ६अ - (२क - ३अ) - (अ - ६क)$

८. $४अ - २ब + ५स - (२अ - ३ब + ७स) + (३ब + ९स - २अ)$

९. $३क - \{२ख + (५क - \overline{३क + ख})\}$

१०. $ख - २क - \{ग - क - \overline{ख - क + ग}\}$

११. $५(क - ३) - ३(क - २) - (२क - ९)$

१२. $७अ - २(क - \frac{अ}{२}) + (९२अ + ४क)$

१३. $क^३ - (क - २) + ३(क^२ - २ - ५क)$

१४. $अ(अ - क) - \frac{अ}{२}(२अ - २क) + \frac{क}{३}(३अ - ६क)$

१५. $३(क - अ) + २(ख - अ) + \{२(क + अ) - ३(ख + अ)\}$

१६. $\frac{५क - १५}{५} - \frac{१२ - ४२क}{६} + \frac{२७क - ५४}{९}$

१७. $\frac{३क + १२}{३} - \frac{२क - ४}{२} - \frac{२२ - ३३क}{११}$

१८. $\frac{६क - ८}{२} + \frac{१०क - ५}{५} - \frac{१४क - २१}{७}$

१९. $\frac{५क-१०}{५}-\frac{७क+२१}{७}+\frac{३क-९}{३}$

२०. $\frac{४-९क}{३}-\frac{७-२१क}{७}+\frac{२०+२५क}{५}$

२१. यदि अ = १ ब = २ स = ३ तो
{अ^{२} − (ब—स)^{२}} − {ब^{२} − (स − अ)^{२}} − {स^{२} − (अ-ब)^{२}} का मूल्य बताओ ?

जोड़ अथवा संकलन

२५. परिभाषा:—वह क्रिया जिस के द्वारा हम दो अथवा अधिक मानों को एकत्रित करते हैं, 'जोड़' कहलाती है। और फल को उन मानों का'योग' कहते हैं।

जिस प्रकार अंक गणित में४ + ५ = ९,उसी तरह बीजगणित में अ + ब,अ और'ब' का योग हुआ। यदि हम कोष्ठ खोलने के नियमों को स्मरण रखें और काम में लावें,तो मालूम होगा कि 'अ' और (−ब) का योग अ + (−ब) = अ−ब हुआ−

२६, यहाँ पर यह प्रश्न उठता है कि 'अ' और 'ब' के मध्य में ऋण का चिह्न है फिर 'अ − ब' योग कैसे हुआ ? यह तो 'अ' और 'ब' का अन्तर हुआ। इस प्रश्न के उत्तर में हम अपने नवीन पाठकों को याद दिलाते हैं, कि अ − ब,अ और ब का अन्तर अवश्य हुआ परन्तु उसको 'अ' और ' − ब' का योग कहना भी उतना ही आवश्यक है अर्थात् बीजगणित में + का अर्थ किसी वस्तु की वृद्धि और − का अर्थ उसकी घटती से है और

सम्पूर्ण घटती बढ़ती होने के पश्चात् जो फल मिलता है, उसको बीज गणित का योग कहते हैं। योग में ऋण का चिह्न आजाने से भी कोई बाधा नहीं होती है।

२७. जोड़ की पहली रीतिः—हम जानते है कि जब दो अथवा अधिक मानों को जोड़ना होता है, तो मानों को कोष्ठ में बन्द करके कोष्ठों के पहिले + चिन्ह बना देना चाहिये। अपरंच हम यह भी जानते हैं कि ऐसे कोष्ठ को खोलते समय उसके भीतर के पदों से पहिले के चिह्न बदलने नहीं पड़ते हैं। इसलिये इससे यह नियम निकला, कि यदि दो अथवा अधिक मानों को जोड़ना हो, तो सब मानों के सब पदों को उनके पहिले के चिह्नों को बिना बदले हुए ही लिखकर एक बड़ा मान बना लेना चाहिये। फिर सम पदों को एकत्रित करके सरल करने से योग मिल जाता है एक अथवा दो उदाहरणों से यह नियम भली भाँति समझ में आजावेगा।

२८. उदाहरण १:—अ + ब − स, ३ (अ − ब + स), और ४ (अ − ब − स) का योग बताओ ?

योग = अ + ब − स + ३(अ − ब + स) + ४(अ − ब − स)

= अ + ब − स + ३(अ − ब + स) + ४अ − ४ब − ४स

= अ + ३अ + ४अ + ब − ३ब − ४ब − स + ३स − ४स

= ८अ − ६ब − २स उत्तर

उदाहरण २:—$अ^2$ − बस − २ अस, $ब^2$ + अस − $स^2$, $स^2$ − ३अस − ४ बस और अब + अस + बस का योग निकालो ?

योग = $अ^2$ − बस − २असं + $ब^2$ + अस − $स^2$ + $स^2$ − ३अस − ४बस + अब + अस + बस

= $अ^2$ − बस − ४बस + बस − २अस + अस − ३अस + अस + $ब^2$ − $स^2$ + $स^2$ + अब

= $अ^2$ − ४बस − ३अस + $ब^2$ + अब उत्तर

२९. जोड़ की दूसरी रीतिः—ऐसे मानों को जिन में सम तथा विषम दोनों प्रकार के पद होते हैं, पंक्तियों में एक दूसरे के ऊपर इस प्रकार लिखते हैं, कि समपद एक ऊर्ध्वाधार पंक्ति में हों, फिर सम पदों को जोड़ कर सरल कर लेते है।

उदाहरण १ः—४अक − ३बख + ५सग, ७अक + ८बख − २सग और २अक − २बख + सग का योग बताओ ?

४ अक − ३बख + ५सग

७अक + ८बख − २सग

२ अक − २बख + सग

---

१३ अक + ३बख + ४सग = योग   उत्तर

उदाहरण २ः—$अ^3$ − $अ^2$ + अ, अ + $अ^2$ + १, और $अ^4$ − $अ^3$ − १ का योग बताओ ?

मानों को पंक्तियों में लिखा तो

$अ^3$ − $अ^2$ + अ

$अ^2$ + अ + १

$अ^4$ − $अ^3$ − १

योग = $अ^4$ + २अ

नोटः—यह ध्यान रखना चाहिए, कि जब सम पदों के ऊर्द्धाधार पंक्तियों में समपदों के अंकात्मक गुणक बराबर किन्तु

भिन्न चिह्न वाले होते हैं, तो ऐसी दशा में उन पदों को काट देने से प्रश्न बहुत सरल होजाता है। जैसे पिछले उदाहरण में अ^{३} और —अ^{३} को काट दिया इसी प्रकार अ^{२} और - अ^{२} को, और १,ब—१ को भी काट दिया। और शेष पदों का योग निकाल लिया।

अभ्यास ६

योग बताओ ?

१. ३क—५ख, ५क - २ख, और ७ख—४क का

२. क^{२} —५क ख—७ख^{२}, और ३ख^{२} + ४ख क—क^{२} का

३. म^{२} —३म न + २न^{२}, ३न^{२} —म^{२}, और ५म न—३न^{२} + २म^{२} का.

४. ३अ^{२} —२असं - २अब, २ब^{२} + ३बस + ३बअ. और स^{२} - २अस - २बस का.

५. ३अ—४ब + स - ७द, २अ + ९ब - ३स + २द, द—४स —८अ, और २ब—३स+ ६द का.

६. ३अ - २ब + ७स - ८द,२स + ६द—५अ,३ब + द—१०स, स - ४ब + अ, और ५ब - ७द का.

७. क^{३} + ३क^{२} — ५क + ४, २क^{३} - ६क^{२} - ७क - ८, - क^{३} + ७क^{२} - २क + ९ और ५क^{२} + २ का.

८. ४क^{२} - ३ख^{२} - ४ग - ३, ख^{२} - २ग - ४, ६ग - २ - ३क^{२}, और ९ - ख^{२} का.

९. क^{३} - ४क^{२} ख + ५कख^{२}, ३क^{२}ख - २कख^{२} + ख^{३}, और - २कख^{२} - ख^{३}.

१०. ३क^{३} − ७क^{२} + ५क, क^{३} − ७क + २, और ३क^{२} + २क − ७

११. $\frac{५}{६}$अ − $\frac{३}{४}$ब + $\frac{७}{८}$स, अ + $\frac{७}{४}$ब − $\frac{१}{८}$स, $\frac{१}{६}$अ − २ब − $\frac{२}{८}$स

१२. $\frac{३}{४}$(८क − १२ख), $\frac{२}{३}$(६क − ९ख), $\frac{१}{६}$(१२क + ३०ख)

१३. ५ य^{३} − ७ य^{२} + ४ य + १७; −२ य^{३} + ५ य^{२} + ११ य − ८; ७ य^{३} + ९ य^{२} − ६ य + ३; ८य^{३} − य^{२} + ७ य + ४; और −१३ य^{३} + २ य^{२} − १६ य + ५ का योग निकालो।

१४. ८ क − ९ ख + ४ ग; क − ५ ख + २ ग; ७ क − ३ ख + ग; और ४ क − ख + ६ ग का योग बताओ ?

१५. ६ य + ४ र − २ ल; ३ य − १३ र + ९ ल; −९ य − र + ७ ल और य + ५ र − १० ल का योग निकालो ?

१६. ७ क^{२} + ९ कख − ८ ख^{२}; ६ कख − ४ क^{२} + २ ख^{२}; −२ ख^{२} + ५ क^{२} + ५ कख; १२ क^{२} − ११ ख^{२} − ७ कख; और ८ कख + ३ ख^{२} + १० क^{२} का योग बताओ ?

१७. अ^{३} − ५ बअ^{२} + ७ अब^{२} − ब^{३};
५ अ^{३} + ४ बअ^{२} − ४ अब^{२} − २ ब^{३};
३ अ^{३} − ७ बअ^{२} + ५ अब^{२} − ३ ब^{३}; और
४ अ^{३} + २ बअ^{२} − ८ अब^{२} + ९ ब^{३} का योग निकालो ?

१८. ३ क − २ ख + ९ ग; ५ ग − ३ क − ८ घ; −३ घ − ५ ग + ८ क; और ७ ग − ४ ख + ११ घ का योगफल निकालो ?

१९. ५ य^{२} + ३ य^{२}र − ७ यर^{२} + र^{३}; ९य^{३} − १२ र^{३} + ७ य^{२}र − ५ यर^{२} ; ४ य^{२}र + ३ यर^{२} − ५ र^{३} − ७ य^{२}; यर^{२} − ३ य^{२}र + ११ य^{३} − ७ र^{३}; और ८ यर^{२} + २र^{३} + ३ य^{३} − ९य^{२}र इन सब का योग बताओ ?

२०. $\text{कख}^{\frac{१}{३}} - २\,\text{खग}^{\frac{१}{३}} + ३\sqrt{\text{क}+\text{च}} + ४\,\text{ल}\sqrt{\text{छ}}$;

$३\,\text{कख}^{\frac{१}{३}} - ५\,\text{खग}^{\frac{१}{३}} - ४\sqrt{\text{क}+\text{च}} + ७\,\text{ल}\sqrt{\text{छ}}$;

$-५\,\text{कख}^{\frac{१}{३}} + \text{खग}^{\frac{१}{३}} + ५\sqrt{\text{क}+\text{च}} - २\,\text{ल}\sqrt{\text{छ}}$; और

$२\,\text{कख}^{\frac{१}{३}} + ९\,\text{खग}^{\frac{१}{३}} - ११\sqrt{\text{क}+\text{च}} - ९\,\text{ल}\sqrt{\text{छ}}$ का योग-फल बताओ ।

बाक़ी अथवा व्यवकलन-

३० परिभाषाः—वह क्रिया जिसके द्वारा हम एक मान को दूसरे मान से घटाते हैं 'बाक़ी' कहलाती है। और बाक़ी के फल को 'शेष' कहते हैं।

अङ्कगणित में जब ५१ में से २७ घटाये, तो ५१ − २७ = २४ शेष रहे। इसी प्रकार बीजगणित में ५ब में से २अ घटाये, तो ५ब − ५अ शेष रहा।

३१. बाक़ी की रीतिः—जिस मान में से घटाना है पहिले उसको लिख लिया। फिर उसके आगे घटाये जाने वाले मान को कोष्ठ में लिखकर कोष्ठ के पहिले − चिन्ह लगा लिया। अब यह एक मान मिला, जो कि दिये हुए मानों का अन्तर और हमारा अभीष्ट शेष है। इस मान को सरल करने में यह स्पष्ट ही

है कि कोष्ठ खोलने के लिये कोष्ठ के भीतर के प्रत्येक पदसे पहिले का चिह्न, कोष्ठ खोलने के नियमानुसार (प्रक्रम १३) बदलना चाहिये और फिर सम पदों को एकत्रित करके सरल कर लेना चाहिये, इस प्रकार अभीष्ट शेष मिल जावेगा।

उदाहरण:—२ अ - ३ब — ४स, में से अ - २ब+३स घटाओ।

शेष = २ अ — ३ब — ४स — (अ — २ब + ३स)

= २ अ — ३ब — ४स — अ + २ब — ३स

= २ अ - अ — ३ब + २ब — ४स - ३स

= अ - ब - ७ स   उत्तर।

३२. ऊपर बताई हुई रीति से बाक़ी के लिये एक नियम निकलता है, वह यह है।

पहिले जिस मान में से घटाना है उसको लिखलो और फिर उसके नीचे घटाये जाने वाले मान को इस प्रकार लिखो कि, सम पद ऊपर नीचे हों, जैसा कि जोड़ की दशा में किया जाता है। फिर नीचे के मान के प्रत्येक पद का चिह्न बदलकर दोनों मानों को जोड़ की भाँति जोड़ लो। फल अभीष्ट शेष होगा।

उदाहरण १:—६अ — ब + स - ३द, में से ३अ + ब - स — द घटाओ।

६अ — ब + स — ३द

<u>३अ + ब — स — द</u>

नीचे के मान के चिह्न बदले तो   ६अ - ब + स - ३द,

<u>— ३अ — ब + स   + द</u>

हुआ। अब जोड़ की तरह जोड़ा तो ३अ — २ब + २स — २द शेष मिला।

उदाहरण २:— अ^२ — ५अब + २अस - २ब^२, मेंसे ३ अब - ५अस + स^२ घटाओ।

अ^२ — ५अब + २अस — २ब^२

३अब — ५अस + स^२

चिह्न बदलने पर

अ^२ — ५अब + २अस - २ब^२

— ३ अब + ५अस - स^२

अ^२ — ८अब + ७अस — २ब^२ — स^२

नोट:—अभ्यास होजाने पर विद्यार्थी मन ही मन में चिह्न बदलकर एक साथ ही दोनों क्रिया कर सकते हैं।

अभ्यास ७

घटाओ—

१. ५ क — ८ अ — २, में से ३ क — ४ अ + ११

२. क^२ + २ कख + ५ ख^२, में से ३ क^२ — २ कख — ३ ख^२

३. ६ अ — २ ब - ३ स — २ द में से ५ अ - ३ स + ४ द

४. ५ क + २ ख — ३ ग + ९ में से ६ क — ३ ख - ४ ग + ७

५. ६ क^४ — ३६ + ८ क^२ - ९ क, में से ३ क^३ — ७ + ८ क^२ — ३ क

६. स - $\frac{१}{२}$ अ - $\frac{२}{३}$ ब, में से $\frac{अ}{२}$ + $\frac{३}{२}$ ब - $\frac{५}{३}$ स

७. ५ ब^४ - ३ अब^३ + ४ अ^{२}ब,^{२} में से ५ अ^४ - ३ अ^{३}ब + ४ अ^{२}ब^२

८. २ बस − ३ सअ − ४ अब में क्या जोड़ें कि योग बस + सअ हो जावे ?

९. ३ अ^2 − २ ब^2 + ३स^2 में क्या जोड़ दें जिससे योग बस + अस + अब हो जावे ?

घटाओ ?

१०. ख − $\{$२क − $\overline{\text{ग − ख}}$$\}$ में से क − (३ ख−ग)

११. २ न − (३ न − $\overline{\text{२ म − न}}$) में से २ म − (३ म − $\overline{\text{२ न − म}}$).

संक्षेप करो—

१२. २ क − { − २ क − (− २ क − ख) + ख}

१३. २ य − ३ र − (य + २ र) − (८ र − ६ य)

१४. ३ य − (र − ४ ल) + २ द + (य − र) − $\overline{\text{२ ल − द}}$

१५. − ६ क^2 + ४ कख − ३ ख^2 को ९ क^2 − ५ कख + ८ क^2 में से घटाओ ?

१६. − ७य^3 − १३ य^2 + २ य − ९ से १८ य^3 − १५ य^3 + ७य^2 + १२ कितना अधिक है ?

१७. च^2 + चछ + छ^2 − १५ से छ^2 − ५ चज − ज^2 − १२ को घटाओ ?

संक्षेप करो

१८. (क + ख) − (ख + ग) + (ग + घ) − (घ + च)

१९. (य^2 + ३ यर + र^2) − (य^2 − ३ यर + २ र^2)

२०. ४ कख − { (क^2 + २ कख + ख^2) − (क^2 − कख + ख^2) }

३१. प - २ फ + ३ ब को (अ + १) प + (क — २) फ - (ग - ३) ब में से घटाओ ?

गुणा.

३३. गुणा की परिभाषाः—अंकगणित में गुणा की परिभाषा इस प्रकार की जाती है, कि जोड़ के संक्षिप्त रूप को गुणा कहते हैं। जैसे ५ + ५ + ५ + ५ अर्थात् ५ अपने में ४ बार जोड़ना है. इसलिये ५ + ५ + ५ + ५ जोड़ के स्थान में संक्षेप से ५ × ४ लिख लेते हैं, जिसका अर्थ भी यही है, कि ५ को अपने में ४ बार जोड़ो। चूँकि ५ + ५ + ५ + ५ = २० इस लिये इस को हम संक्षिप्त जोड़ अर्थात् गुणा रूप में इस प्रकार लिखते हैं कि ५ × ४ = २०.

३४. गुणा की ऊपर दी हुई परिभाषा ठीक प्रतीत होती है। परन्तु थोड़ा विचार करने पर ज्ञान होगा, कि यह परिभाषा अतीव संकुचित है, क्योंकि यदि ऊपर की परिभाषा को ठीक मान लें तो $\frac{७}{८} \times \frac{३}{४}$ का कुछ अर्थ नहीं होता है। इसलिये मालूम हुआ कि ऊपर की परिभाषा संकुचित है और भिन्न संख्याओं की दशा में सत्य नहीं ठहरती है।

इस लिये गुणा की परिभाषा निम्नलिखित दी गई है।
परिभाषाः—एक संख्या का दूसरी संख्या से गुणा करने का यह अर्थ है, कि पहिली संख्या के साथ वह ही क्रिया की जावे जो इकाई के साथ दूसरी संख्या लाने के लिये की जाती है।

जैसे ५ × ४ का अर्थ है, कि हम ५ के साथ वह ही क्रिया करें जो ४ के लाने के लिये १ के साथ की जाती है।

हम जानते हैं कि ४ = १ + १ + १ + १

इसलिये ५ × ४ = ५ + ५ + ५ + ५ = २०

इसी प्रकार $\frac{७}{८} \times \frac{३}{४}$ का अर्थ है कि हम $\frac{७}{८}$ के साथ वह ही क्रिया करें, जो इकाई के साथ $\frac{३}{४}$ लाने के लिये की जाती है। अंक गणित में भिन्न की परिभाषा में हम जानते हैं, कि $\frac{३}{४}$ लाने के लिये १ के चार बराबर भाग करके उनमें से तीन लेते हैं। इस लिये $\frac{७}{८} \times \frac{३}{४}$ का अर्थ यह है कि $\frac{७}{८}$ के ४ बराबर भाग करें और फिर उन में से ३ भाग ले लें।

$\frac{७}{८}$ का प्रत्येक चतुर्थ भाग $\frac{७}{८ \times ४}$ है और ऐसे तीन भाग

$$\frac{७}{८ \times ४} + \frac{७}{८ \times ४} + \frac{७}{८ \times ४} = \frac{७ \times ३}{८ \times ४}$$

इसलिये $$\frac{७}{८} \times \frac{३}{४} = \frac{७ \times ३}{८ \times ४}$$

३५. दो संख्याओं में से जिसको गुणा करते हैं उसको 'गुण्य' जिससे गुणा करते हैं उसको 'गुणक' और फल को 'गुणनफल' कहते हैं। ऊपर के उदाहरण में $\frac{७}{८}$ गुण्य, $\frac{३}{४}$ गुणक

$\frac{७ \times ३}{८ \times ४}$ गुणनफल है।

३६. अब हम विचार करेंगे कि यदि गुण्य ऋणात्मक हो, तो हमारी परिभाषानुसार गुणा के अर्थ में क्या भेद होजावेगा।

$$(-५)+४=(-५)+(-५)+(-५)+(-५)$$
$$=-५-५-५-५=-२०$$

इसलिए मालूम हुआ कि यदि गुण्य ऋणात्मक संख्या हो, तो गुणा के अर्थ में कोई भेद नहीं होता है।

इसी प्रकार यदि ४+(-५) पर विचार करें

तो $-५= -१-१-१-१-१$

$\therefore ४\times(-५)= -४-४-४-४-४ = -२०$

इसलिए मालूम हुआ कि यदि गुणक ऋणात्मक संख्या को तो भी अर्थ में कोई भेद नहीं पड़ता है।

इसी प्रकार यदि $(-४)\times(-५)$ पर विचार करें

तो $-४=-१-१-१-१$

$$(-४)\times(-५)=-(-५)-(-५)-(-५-(-५)$$
$$=५+५+५+५ \quad \text{(कोष्ठ खोलने पर)}$$
$$=२०$$

३७. इसी प्रकार यदि हम सम्पूर्ण संख्याओं के, चाहे वे (संख्याएँ) पूर्ण हों अथवा भिन्न और चाहे धनात्मक हों अथवा ऋणात्मक गुणा पर विचार करें तो नीचे लिखे नियम निकलेंगे।

नियम १ :—गुण्य और गुणक को आपस में बदलने से गुणनफल में कुछ अन्तर नहीं पड़ता है। जैसे $(-५)\times४=४\times(-५)=-२०$

नियम २ :—यदि गुण्य और गुणक दोनों धनात्मक अथवा दोनों ऋणात्मक हों, तो गुणनफल धनात्मक होता है।

नियम ३ :—यदि गुण्य और गुणक में से एक (गुण्य अथवा गुणक) धनात्मक और दूसरा ऋणात्मक है, तो गुणनफल ऋणात्मक होता है।

उपरोक्त नियमों को इस प्रकार दर्शाते हैं।

(+ अ) × (+ ब) = + अब

(− अ) × (+ ब) = − अब

(+ अ) × (− ब) = − अब

(− अ) × (− ब) = + अब

नियम २ व नियम ३ गुणनफल के चिह्न जानने के लिये हैं। अतः उनको गुणा के 'चिह्न नियम' भी कहते हैं। इन दोनों नियमों को एक नियम में इस प्रकार संक्षिप्त कर सकते हैं।

"संक्षिप्त चिह्न नियम" :—सदृश चिह्नों का गुणनफल धनात्मक और असदृश चिह्नों का गुणनफल ऋणात्मक होता है।

३८. यदि हम यह स्मरण रखें (देखो प्रक्रम १३), कि किसी संख्या को एक दिशा में मापने से वह संख्या धनात्मक और उस दिशा के प्रतिकूल दिशा में मापने से ऋणात्मक होती है, तो ऊपर के चिह्न नियम इस प्रकार भी निकल सकते हैं।

−　　　　　　　　　　+

द　　　　　　अ　　　　　　उ

मानलो कि 'अ' एक मूल बिन्दु है और अ से उ (उत्तर) की ओर मापने से + और इसके प्रतिकूल दिशा द (दक्षिण) की

ओर नापने से—चिह्न माना जावे, तो ३ × २ का अर्थ है कि ३ इकाइयों को 'उ' की ओर २ बार गिनो। यदि ऐसा करें तो ६ इकाइयाँ 'उ' की ओर गिनेंगे। अर्थात् (+ ३) × (+ २) = + ६. (– ३) × २ का अर्थ है कि ३ इकाइयों को 'द' की ओर २ बार मापो। ऐसा करने पर ६ इकाइयाँ 'द' की ओर गिनेंगे।

अर्थात् (– ३) × २ = – ६

३ × (– २) का अर्थ है कि ३ इकाइयों को २ बार गिनो परन्तु (२ के पहिले – चिह्न होने के कारण) उलटी दिशा में अर्थात 'द' की ओर , ∴ ३ × (– २) = – ६

इसी प्रकार (– ३) × (– २ का अर्थ यह है कि ३ इकाइयों को 'द' की ओर २ बार गिनकर फिर दिशा उलटी करो। चूंकि 'द' की ओर की प्रतिकूल दिशा उ की ओर अर्थात् धनात्मक है।

∴ (– ३) × (– २) = + ६

इस प्रकार करने पर भी वह ही नियम निकलते हैं। अर्थात् सदृश चिह्नों का गुणनफल धनात्मक और असदृश चिह्नों का गुणनफल ऋणात्मक होता है।

३९ गुणा करने में 'घात नियम':—

हम जानते हैं कि $क^{३} = क \times क \times क$

और $क^{४} = क \times क \times क \times क$

$\therefore क^{३} \times क^{४} = क \times क \times क \times क \times क \times क \times क = क^{७}$

$\therefore क^{३} \times क^{४} = क^{७} = क^{३ + ४}$

इसी प्रकार $क^{२} \times क^{३} = क \times क \times क \times क \times क = क^{५}$

इनसे यह नियम निकला कि यदि हम किसी परिमाण की

दो शक्तियों को आपस में गुणा करें, तो गुणनफल उसी परिमाण की वह शक्ति होगी, जो उन सामर्थों का परस्पर योग है।

४० परस्पर गुणा करो ?

(१) $क^2 ख^3 \times क^5 ख^2 = क^2 \times क^5 \times ख^3 \times ख^2$
$= क^{2+5} \times ख^{3+2} = क^7 ख^5$

(२) $3क^2ख \times (-4ख) = 3 \times (-4) क^2 \times ख \times ख$
$= -12 क^2 ख^2$

(३) $-4 क^2 ख \times (-5 क^3 ख) = (-4) \times (-5) क^2 \times$
$क^3ख \times ख = 20 क^5ख^2$

(४) $(3अ - 4ब) \times (-2) = 3अ \times (-2) - 4 ब \times (-2$
$= -6अ + 8ब$

(५) $-4क^2ख^3 (क^2 - 3खग + 5ग^2)$
$= -4क^2ख^3 \times क^2 - 4 क^2ख^3 \times (-3खग) + 5$
$ग^2 \times (-4क^2ख^3)$
$= -4 क^4ख^3 + 12 क^2ख^4ग - 20 क^2ख^3ग^2$

(६) $(\frac{1}{6}अ - \frac{2}{3}ब - स) \times (-\frac{3}{5})अब^2स$
$= \frac{1}{6} अ \times (-\frac{3}{5})अब^2स + \frac{2}{3} \times \frac{3}{5} ब \times अब^2स + \frac{3}{5}$
$अब^2 स \times स$
$= -\frac{1}{10}अ^2ब^2स + \frac{3}{5}अब^3स + \frac{3}{5}अब^2स^2$

अभ्यास ८.

परस्पर गुणा करो ?

१. $3क \times 4क$ २. $7क^2 \times (-2क)$

३. $अ^२ब^३स^४ \times बअ^२$ ४. $-३प^२फ \times २पफ^२$

५. $\frac{३}{४}अ^२ \times \left(-\frac{४}{३}\right)ब^२$ ६. $(-ब)^२$

७. $(क^३)^२$ ८. $(-क^२)^३$

९. $(-२कख)^३$ १०. $(-३क^२ख)^३$

११. $(अ + ५ब - ३स) \times ५$ १२. $(२अ - ३ब + २स) \times (-४)$

१३. $(अ^२ - २ब + ७) \times (-३अ)$

१४. $(३क^४ - २क^२ + ६) \times (-५क^२)$

१५. $(-३अ - २अब + ब^२) \times (-२ब^२)$

१६. $(-५अ^३ - अब^४स^३ + ९ब^५स^२ \times (-१२अ^६ब^४स)^३$

१७. $(अ^२ - २अब - ब^२) \times २अ \times ३ब$

१८. $(क^२ - ५क + ३) \times २क \times (-३क)$

१९. $अ^{म+१} \times अ^{म-१}$

२०. $(अ^{क} + अ^{२क}) \times अ^{क}$

४१. जब गुणक में दो अथवा अधिक पद हों, उसके गुणा करने की रीति। यथा $(क + ख) \times (ग + घ)$ का मूल्य बताओ ? यहाँ $क + ख$ के स्थान में एक अक्षर ल रख लेते हैं।

$$\therefore (क + ख) \quad (ग + घ) = ल(ग + घ)$$

$$= लग + लघ$$

$$= (क + ख)\,ग + (क + ख)\,घ$$

$$= कग + खग + कघ + खघ$$

यहाँ क+ख को पहिले ग से और फिर घ से गुणा करके जोड़ देते हैं।

ऊपर की रीति का दृष्टान्त इस प्रकार दे सकते हैं।

मान लो कि मोहन के पास 'ग' संख्यक अंगूर के गुच्छे हैं और सोहन के पास 'घ' संख्यक गुच्छे। इसलिए कुल ग + घ गुच्छे हुए। यदि प्रत्येक गुच्छे में 'क + ख' अंगूर हों, तो कुल अंगूर (क + ख) (ग + घ) हुए। परन्तु हम जानते हैं कि मोहन के पास (क + ख) ग और, सोहन के पास (क + ख) घ अंगूर हैं।

∴ (क + ख) (ग + घ) = (क + ख) ग + (क + ख) घ

= कग + खग + कघ + खघ.

४२. उदाहरण:—(क - २) × (क - ५) का मूल्य बताओ ?

मानलो कि क - २ = अ

∴ (क - २) × (क - ५) = (क — ५) × अ

= क अ - ५अ

= क (क - २) — ५ (क - २)

= $क^{२}$ — २क - ५क + १०

= $क^{२}$ — ७क + १०

गुणा करने की सरल क्रिया इस प्रकार हो सकती है।

क - २

क - ५

$क^{२}$ — २क (क - २) को 'क' से गुणा करने से,

— ५क + १० 'क — २' का (— ५) से गुणा करने से,

$क^{२}$ - ७क + १०

अभ्यास ९

गुणा करो ?

१. $२य + ३$	को	$२य - ३$ से
२. $२क - ४$	,,	$३क - २$,,
३. $५क + ३$	,,	$३क - ५$,,
४. $२य + ३क$	,,	$४य - ३क$,,
५. $४य - २क$	,,	$२य - क$,,
६. $य^२ + यर + र^२$	,,	$य - र$,,
७. $\frac{२य + १}{३}$	,,	$\frac{१ - २य}{३}$,,
८. $अ + ३ब$	,,	$२स - ५द$,,
९. $अ + ३क$	,,	$अ - ५क$,,
१०. $क^२ - ख^२$	,,	$क + ख$ से

११. $३क^२ - ५कख + २ख^२$ को $२क - ७ख$ से गुणा करो ?

१२. $य^२ + ३यर + र^२$ को $य^२ - ३यर + र^२$ से गुणा करो ?

१३. $य^२ + २यर + ३र^२$ को $य^२ - २यर + र^२$ से गुणा करो ?

१४. $क^५ + क^४ + क^३ + क^२ + क + १$ और $क^३ - क^२ - क + १$ का गुणनफल निकालो ?

१५. $य^३ + ६य^२ + १८य + १$ को $य^३ - ६य^२ + १८य - १$ से गुणा करो ?

१६. $य^४ + ३य^३ + ४य^२ + ३य + १$ और $य^४ - ३य^३ + ४य^२ - ३य + १$ का गुणनफल निकालो ?

१७. $क + १$, $क - २$, और $क + ३$ का गुणनफल बताओ।

१८. $य + ३र$, $य + र$, $य - ३र$, और $य - १$ का गुणनफल क्या होगा ?

१९. $अ + क$, $अ - क$ और $अ^२ + क^२$ का गुणनफल निकालो ?

२०. सरल करो

$$अ(क - ख) - क (अ - ग) + ग (अ - क)$$

२१. $(य^२ + र^२) (य - र) + (य^२ - र^२) (य + र) + २र^३$ को सरल करो ?

२२. $(य + अ) (य + क) - (य + अ) (य - क) + (य - अ) (य + क) - (य - अ) (य - क)$ को सरल करो ?

अति उपयोगी सूत्र

४३. १. दो परिमाणों के योग और अन्तर का घात उन्हीं के वर्गान्तर के तुल्य होता है ।

$$(क + ख) (क - ख) = क^२ - ख^२$$

$$\begin{array}{r} क + ख \\ क - ख \\ \hline क^२ + कख \\ - कख - ख^२ \\ \hline क^२ - ख^२ \end{array}$$

२. $(क + ख) [क + ख] = [क + ख]^२$

$$= क^२ + २कख \times ख^२$$

अर्थात् दो पदों के योग का वर्ग उन्हीं के वर्ग के योग, धन उन्हीं के दूने घात के बराबर होता है ।

यह सूत्र भी ऊपर की भाँति गुणा करने से मिलता है।

$$
\begin{array}{r}
क + ख \\
क + ख \\
\hline
क^2 + कख \\
+ कख + ख^2 \\
\hline
क^2 + २कख + ख^2
\end{array}
$$

३. $[क - ख]\,[क - ख] = (क - ख)^2 = क^2 - २कख + ख^2$

दो पदों के अन्तर का वर्ग उन्हीं के वर्ग के योग ऋण उन्हीं के दूने घात के तुल्य होता है।

$$
\begin{array}{r}
क - ख \\
क - ख \\
\hline
क^2 - कख \\
- कख + ख^2 \\
\hline
क^2 - २कख + ख^2
\end{array}
$$

४. $(क + ख)^3 = क^3 + ३क^2ख + ३कख^2 + ख^3$

$\because\ [क + ख]^3 = [क + ख]^2 \times [क + ख] = [क^2 + २कख + ख^2]\,[क + ख]$

$\because\ (क + ख)^3 = (क^2 + २कख + ख^2) \times (क + ख)$

$= क^3 + ३क^2ख + ३कख^2 + ख^3$

$$
\begin{array}{r}
क^2 + २कख + ख^2 \\
क + ख \\
\hline
क^3 + २क^2ख + कख^2 \\
क^2ख + २कख^2 + ख^3 \\
\hline
क^3 + ३क^2ख + ३कख^2 + ख^3
\end{array}
$$

५. $(क - ख)^3 = (क - ख)^2 \times (क - ख)$

$= (क^{२} - २कख + ख^{२})(क - ख)$
$= क^{३} - ३क^{२}ख + ३कख^{२} - ख^{३}$

$$
\begin{array}{r}
क^{२} - २कख + ख^{२} \\
क - ख \\
\hline
क^{३} - २क^{२}ख + कख^{२} \\
- क^{२}ख + २कख^{२} - ख^{३} \\
\hline
क^{३} - ३क^{२}ख + ३कख^{२} - ख^{३}
\end{array}
$$

६. $(क + ख)(क + ग) = क^{२} + (ख + ग) क + खग$

$$
\begin{array}{r}
क + ख \\
क + ग \\
\hline
क^{२} + कख \\
+ कग + खग \\
\hline
क^{२} + कख + कग + खग
\end{array}
$$

अथवा $क^{२} \times क (ख + ग) + ख + ग$

नोटः—सूत्र २ व सूत्र ६ का मुक़ाबिला करने से मालूम होगा, कि सूत्र$_{२}$, सूत्र ६ का विशेष रूप है। अर्थात् यदि सूत्र ६ में 'ग' के स्थान में 'ख' रख दें तो दोनों सूत्र एक ही हो जाते हैं। अथवा दूसरे शब्दों में इस प्रकार कहना चाहिये कि सूत्र ६ में द्वितीय स्थानीय पद भिन्न-भिन्न हैं और सूत्र २ में वह एक ही है।

४४. **उदाहरण सूत्र १ः**—(१) $(३क + ५ख)$ को $(३क - ५ख)$ से गुणा करो ? [] $(३क + ५ख)(३क - ५ख) = (३क)^{२} - (५ख)^{२}$

$= ९क^{२} - २५ख^{२}$

२. $२३४५ \times २३४५ - २३४३ \times २३४३$ का मूल्य बताओ ?

$२३४५ \times २३४५ - २३४३ \times २३४३$

$= २३४५^२ - २३४५^२$

$= (२३४५ + ५३४५)\ (२३४५ - २३४३)$

$= ४६८८ \times २ \qquad = ९३७६$

उदाहरण सूत्र २:—(१) $(२य + ३)$ का वर्ग करो ?

$(२य + ३)^२ = (२य^२) + २ \times (२य) \times ३ + ३^२$

$= ४य^२ + १२य + ९$

[२] १०५ का वर्ग बताओ ?

$१०५^२ = [१०० + ५]^२ = १००^२ + २ \times १०० \times ५ + ५^२$

$= १०००० + १००० + २५$

$= ११०२५$

उदाहरण सूत्र ३:–[१] [८क-५] का वर्ग बताओ ?

$[८क - ५]^२ = [८क]^२ - २ \times ५ \times [८क] + ५^२$

$= ६४क^२ - ८०क + २५$

[२] ९९ का वर्ग बताओ ?

$९९^२ = [१०० - १]^२ = १००^२ - २ \times १०० \times १ + १^२$

$= १०००० - २०० + १$

$= ९८०१$ उत्तर

उदाहरण सूत्र ४:–[१] [२क + ३] का घन बताओ ?

$[२क + ३]^३ = [२क]^३ + ३\ [२क]^२ \times ३ + ३[२क] \times ३^२ + ३^३$

$= ८क^३ + ३६क^२ + ५४क + २७$

[२] यदि $क+\frac{१}{क}=३$, तो $क^{३}+\frac{१^{३}}{क}=१८$?

$$\left[क+\frac{१}{क}\right]^{३}=क^{३}+३क^{२}\times\frac{१}{क}+३क\times\frac{१}{क^{२}}+\frac{१}{क^{३}}$$

$$\therefore ३^{३}=क^{३}+३क+३\times\frac{१}{क}+\frac{१}{क^{३}}$$

$$\therefore २७=क^{३}+\frac{१}{क^{३}}+३\left[क+\frac{१}{क}\right]$$

$$=क^{३}+\frac{१}{क^{३}}+३\times३$$

$$\therefore क^{३}+\frac{१}{क^{३}}=२७-९=१८$$ उत्तर ।

उदाहरण सूत्र ५:–[१] [३ − ४क] का घन बताओ ?

$$[३-४क]^{३}=३^{३}-३\times३^{२}\times४क+३\times३[४क]^{२}-[४क]^{३}$$

$$=२७-१०८क+१४४क^{२}-६४क^{३}$$

[२] यदि $क-\frac{१}{क}=५$, तो $क^{३}-\frac{१}{क}३$ का मूल्य बताओ ?

$$\left(क-\frac{१}{क}\right)^{३}=क^{३}-३क^{२}\times\frac{१}{क}+३क\times\frac{१}{क}२-\frac{१}{क}३$$

$$\therefore ५^{३}=क^{३}-\frac{१}{क^{३}}-३\left(क-\frac{१}{क}\right)$$

$$\therefore १२५=क^{३}-\frac{१}{क}३-३\times५$$

$$\therefore क^{३}-\frac{१}{क^{३}}=१२५+१५=१४०$$ उत्तर

उदाहरण सूत्र ६:– क + ५] को [क – ९] से गुणा करो ?

[क + ५] [क – ९] = क² + ५ – ९] क + ५ × [– ९]

= क² – ४क – ४५

अभ्यास १०

गुणनफल बताओ ?

१. [५क + ७] और [५क – ७] का

२. [३य – ५] „ [३य + ५] „

३. [अ² – ३ब] „ [अ² + ३ब] „

४. [५३४९७]² – [५३४८७]² का मूल्य बताओ ?

५. [७१९३२]² – (७१९१०)² का मूल्य बताओ ?

६. ७क + ६ का वर्ग करो ?

७. २अ + ७ब का वर्ग करो ?

८. (क + ख)² + २(क + ख)(क – ख)(क + ख)² को सरल करो ?

९. ४क² + २८ क + ४९ का मूल्य बताओ जब क = ८ ?

१०. यदि क + $\frac{१}{क}$ = ४, तो सिद्धि कि क² + $\frac{१}{क}$२ = १४ ?

११. १४३ और १५७ का वर्ग करो ?

१२. ७ क – ६ का वर्ग करो ?

१३. २ अ – ७ ब का वर्ग करो ?

१४. (क + ३ ख)² – २ (क + ३ ख) (क – ३ ख) + (क – ३ ख)² को सरल करो ?

१५. यदि क – $\frac{१}{क}$ = ४, तो सिद्धि करो कि क² + $\frac{१}{क^२}$ = १८ ?

१६. यदि $क + ख = ६$, और $कख = ७$, तो $क^{३} + ख^{३}$ का मूल्य बताओ ?

१७. $(२ क + १)$, और ७३, इन के घन बताओ ?

१८. यदि $क + \frac{१}{क} = ४$, तो $क^{३} + \frac{१}{क^{३}}$ का मूल्य बताओ ?

१९. $(२ - ३ क)$ और ४७ इन के घन बताओ ?

२०. यदि $क - ख = ३$, तो सिद्धि करो कि $क^{३} - ख^{३} - ९ कख = २७$?

२१. यदि $क - \frac{१}{क} = ३$, तो $क^{३} - \frac{१}{क^{३}}$ का मूल्य बताओ ?

२२. $क + ४$ और $क + ६$ का गुणनफल बताओ ?

२३. $क + ६$ और $क - १०$ का गुणनफल बताओ ?

भाग.

४५ परिभाषाः—एक राशि को दूसरी राशि से भाग देने की क्रिया वह कहलाती है, जिससे हमको एक तीसरी राशि ऐसी मिले जिसको उससे गुणा करने से पहिली राशि आजावे।

पहिली राशि को 'भाज्य,' दूसरी को 'भाजक' और तीसरी को 'भजनफल' या 'लब्धि' कहते हैं। जैसे $६ क^{२}$ में २ क का भाग दिया। तो ३ क 'लब्धि' वा भजनफल हुआ। २ क को 'भाजक' और $६ क^{२}$, को 'भाज्य' कहते हैं। यह बिल्कुल प्रत्यक्ष है कि भाजक और भजनफल का गुणानफल भाज्य होता है। और भाग, गुणा की व्यस्त (उलटी) क्रिया है।

४६. चिह्न नियम—

$$+ कख = (+ क) \times (+ ख)$$

$$\therefore \frac{+ कख}{+ क} = + ख \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (१)$$

$-कख = (-क) \times (+ख)$

$\therefore \frac{-कख}{-क} = +ख$ (२)

और $+कख = (-क) \times (-ख)$

$\therefore \frac{+कख}{-क} = -ख$ (३)

और $-कख = क + (-ख)$

$\therefore \frac{-कख}{+क} = -ख$ (४)

फल (१), [२], [३], व [४] के देखने से नीचे लिखा हुआ चिह्न नियम निकलता है।

यदि सदृश चिह्नों को एक दूसरे से भागदें तो लब्धि धनात्मक होती है, और यदि असदृश चिह्नों को एक दूसरे से भाग दें तो लब्धि ऋणात्मक होती है।

नोटः—भाग के लिये चिह्न नियम वही है जो गुणा के लिये है।

४७. शक्ति नियमः—हम जानते हैं कि $क^५ = क \times क \times क \times क \times क$ और $क^३ = क \times क \times क$

$\frac{क^५}{क^३} = \frac{क \times क \times क \times क \times क}{क \times क \times क} = क \times क = क^{५-३} = क^२$ इसी प्रकार

$\frac{क^६}{क^२} = \frac{क \times क \times क \times क \times क \times क}{क \times क} = क \times क \times क \times क$

$= क^४ = क^{६-२}$

ऊपर के उदाहरणों में से प्रत्येक में भजनफल की शक्ति, भाज्य की शक्ति और भाजक की शक्ति का अन्तर है। इसलिये भाग के लिये यह 'शक्ति नियम' निकला।

"यदि एक परिमाण की किसी शक्ति को उसी परिमाण की दूसरी शक्ति से भागदें, तो भजनफल उसी परिमाण की वह शक्ति होगी, जो भाज्य व भाजक की शक्तियों का अन्तर है"।

नोटः—हर एक प्रश्न में भाग देने के पहिले भाज्य व भाजक दोनों में जो कोई एक राशि होवे, उसकी शक्ति के अनुसार दोनों की सब राशों को रखलेना चाहिये।

४८. उदाहरण १, ३ क — ९ ख में — ३ का भाग दो ?

— ३) ३ क - ९ ख (— क + ३ ख

+ ३ क

— ९ ख ∴ — क + ३ ख लब्धि

- ९ ख

×

उदाहरण २:—६ + ८ $य^2$ — १६ य में २ य — ३ का भाग दो ? ६ + ८$य^2$ - १६ य को 'य' की शक्ति के अनुसार रखा तो ८$य^2$ — — १६ य + ६ हुआ।

∴ २ य — ३) ८ $य^2$ — १६ य + ६ (४ य — २

८ $य^2$ — १२ य

— ४ य + ६

— ४ य + ६

× ∴ ४ य — २ उत्तर

उदाहरण ३ः—सिद्धि करो कि किसी एक परिमाण की शून्य शक्ति का मूल्य १ होता है। अर्थात् $क^{\circ} = १$

मानलो कि हम को $क^{न}$ में $क^{न}$ का भाग देना है। तो भजन-फल १ होगा परन्तु $\frac{क^{न}}{क^{न}} = क^{न-न} = क^{\circ}$

$$\therefore क^{\circ} = १$$

अभ्यास ११

भाग दो ?

१. $क^{२} - ६ क + ८$ में $क - २$ का

२. $क^{२} + ७ क + १२$ में $क + ३$ का

३. $६ य^{२} + ५ य + १$ में $२ य + १$ का

४. $५ य^{२} + ३१ य + ३०$ में $५ य + ६$ का

५. $१० क^{२} - १४ क - १२$ में $५ क + ३$ का

६. $९ क^{२} - ३ क - २$ में $३ क - २$ का

७. $य^{२} + (क - २) य - २ क$ में $य - २$ का

८. $क^{४} - ४क^{२} + १२ क - ९$ में $क^{२} - २क + ३$ का

९. $क^{3} + ख^{3}$ में $क + ख$ का

१०. $क^{४} + क^{२} ख^{२} + ख^{४}$ में $क^{२} + क ख + ख^{२}$ का।

११. $२० य^{3} + १३ य^{२}र - २९ यर^{२} + ६ र^{3}$ में $४ य - ३र$ का ?

१२. $क^{५} - ३क^{४} + क^{३} + ५क^{२} - २०क + २८$ में $क^{२} - ४$ का

१३. $य^{४} + ९ य^{२} + ८१$ में $य^{२} - ३ य + ९$ का

१४. क^{४} + ६४ ख^{४} में क^{२} + ४ कख + ८ ख^{२} का

१५. ८१ अ^{४} + ४ य^{४} में ९ अ^{२} − ६ अ य + २ य^{२} का

१६. य^{८} + य^{६} + य^{४} + य^{२} + १में य^{४} + य^{३} + य^{२} + य + १का

१७. क^{६} − ख^{६} में क^{२} − ख^{२} का

१८. ४७५ क^{४} − १८२क^{३} + ७६ क^{२} − २४ क + १६ का ४७५ क^{७} − २५५७ क^{६} + २४११ क^{३} + ३२ में

१९. १ − य का १ में

२०. १ + २ य + य^{२} में १ − २ य + य^{२} का

एक वर्ण समीकरण.

४९ परिभाषाः—जब हम बीजगणित के दो मानों को एक दूसरे के बराबर रखते हैं, तो उसे 'समीकरण' कहते हैं। और प्रत्येक मान को समीकरण का एक पक्ष कहते हैं।

जैसे क + १ + २ क + ३ = ३ क + ४ (१)

और क + १ + क + ३ = ३ क + २ (२)

परन्तु आजकल समीकरण का अर्थ प्रायः संकुचित लिया जाता है। जब एक मान दूसरे के बराबर है तो यह सम्भव है कि दोनों मान सर्वथा बराबर हों, चाहें अक्षरों का मूल्य कुछ क्यों न हो। जैसे ऊपर के उदाहरण १ में दोनों पक्ष 'क' के प्रत्येक मूल्य के लिये बराबर हैं अर्थात् चाहै क = ३ अथवा ७, अथवा कोई और संख्या − (क + १) + (२ क + ३) = ३ क + ४.

ऐसे उदाहरणों को प्राः समीकरण नहीं करते हैं किन्तु उन को 'सरूप समीकरण' बोलते हैं।

परन्तु जब दो मान परस्पर अक्षरों के विशेष मूल्य के लिये ही बराबर होते हैं तो उसको "विरूप समीकरण" कहते हैं।

जैसे (क+१)+(क+३)=३ क+२

यह तब ही सम्भव है जब क=२ , अन्यथा नहीं। इस लिये इसको समीकरण कहते हैं।

५०, यदि कोई समीकरण ऐसा है जिसमें सरल होने पर एक ही अक्षर प्रथम शक्तिवाला रहता है, तो ऐसे समीकरण को 'एक वर्ण समीकरण कहते है और यह अक्षर 'अज्ञात राशि' कहलाता है।

अज्ञात राशि का मूल्य निकालने को 'समीकरण का मूल्य निकालना, बोलते हैं।

५१. स्वयं सिद्धिः—समीकरण के मूल्य निकालने में नीचे लिखे स्वयं सिद्धि काम में लाये जाते हैं।

१. यदि बराबर २ में एक ही अथवा बराबर २ जोड़ा जावे तो योग बराबर होंगे।

२. यदि बराबर २ में से एक ही अथवा बराबर २ घटाया जावे तो शेष बराबर होंगे।

३. यदि बराबर २ को एकही अथवा बराबर २ से गुणा करें तो गुणान फल बराबर होंगे।

४. यदि बराबर २ में एक ही अथवा बराबर २ का भाग दें, तो भजन फल बराबर होंगे।

५२. समपक्ष शोधन का सूत्र

यदि एक समी करण में एक पक्ष से दूसरे पक्ष को कोई

पद ले जावें, तो वह समपक्ष शोधन कहाता है और उसका नियम यह है कि जिसपद को एक पक्ष से दूसरे पक्ष में ले जाते हैं तो उससे पहिले के चिन्ह को बदल देते हैं।

इस नियम को सिद्ध करने के लिये ८ य−५=४य+७ एक समीकरण ले लिया। इसके दोनों पक्षों में ५ जोड़ देने से

८ य=४ य+७+५। अब इस क्रिया से ५ यह अंक बाँये पक्ष से दाहिने पक्ष में आ गया परन्तु ऐसा करने में उसका चिह्न −से+हो गया है।

अब इस नई समीकरण के दोनों पक्षों से ४ य घटा लेने से ८ य−४ य=७+५ यह समीकरण मिला। इस बार ४ य दाहिने पक्ष से बांये पक्ष में आगये परन्तु इसमें उसका चिह्न +से−हो गया। इसी से पक्षशोधन का यह सूत्र सिद्धि हुआ।

५३. समीकार में सब राशों का चिह्न बदल सकते हैं। इसको सिद्ध करने के लिये ८ − ३ य=२ यह एक समीकरण ले लिया। अब दोनों पक्षों को (−१) से गुणा किया तो−८+३ य=−२

इसमें देखा जाता है कि पूर्व समीकरण की सब राशों के सब चिह्न बदल गये।

५४. अब हम कुछ उदाहरणों द्वारा समीकरण के मूल्य निकालने की रीति की व्याख्या करेंगे, और अज्ञात राशि को सदैव 'य' रखेंगे।

उदाहरण १:—३ य+७=य+२१ इसका मूल्य बताओ?

नोट:—उपरोक्त प्रश्न उस प्रकार भी हो सकता है।

यदि ३ य + ७ = य + २१ तो य का मूल्य बताओ ?

३ य + ७ = य + २१

३ य – य = २१ – ७ अथवा २ य = १४

∴ य = ७ उत्तर ।

उदाहरण २:—७ (य + १) = ३ (४ + २ य) इसका मूल्य बताओ ?

७ (य + १) = ३(४ + २ य)

∴ ७ य + ७ = १२ + ६ य

∴ ७ य – ६ य = १२ – ७ ∴ य = ५ उत्तर

उदाहरण ३:—$\frac{य}{४}+\frac{य}{५}=\frac{य}{८}+$ १३इसका मूल्य बताओ ।

$$\frac{य}{४}+\frac{य}{५}=\frac{य}{८}+१३$$

$$\because \frac{य}{४}-\frac{य}{८}+\frac{य}{५}=१३$$

दोनों पक्षों को ४० से जो ४, ५, ८ का लघुत्तम समापवर्त्य है गुणा किया तो भिन्न दूर गई ।

∵ १० य + ८ य – ५ य = १३ × ४०

∴ १३ य = १३ × ४० = य = ४० उत्तर

उदाहरण ४:—$\frac{३}{५}+\frac{४}{१०य}=\frac{२३}{५य}+१$ इस का मूल्य बताओ ।

दोनों पक्षों को १० य से गुणा करने से

$$\frac{३\times१०य}{५}+४=२३\times२+१०य$$

∴ ६ य + ४ = ४६ + १०य

$\therefore ४ - ४६ = १०य - ६य$

$\therefore -४२ = ४य \qquad \therefore य = -\frac{४२}{४} = -१०\frac{१}{२}$

उदाहरण ५:— $\frac{य + ·१५}{·१२५} - \frac{य - ·२५}{·५} = ३·३$ इसका मूल्य बताओ ?

$$\frac{य + ·१५}{·१२५} - \frac{य - ·२५}{·५} = ३·३$$

$$\because ८(य + ·१५) - ४(य - ·२५) = ३·३$$

$$८य + १·२ - ४य + १ = ३·३$$

$$\because ४य = ३·३ - १ - १·२ = १·१$$

$\therefore य = ·२७५$ उत्तर

उदाहरण ६:— $\frac{य - २}{य - ७} + \frac{य - १}{य - ६} = \frac{य + २}{य - ३} + \frac{य - ५}{य - १०}$ इसमें य का मान निकालो ?

यदि हम दोनों पक्षों में से १, १ घटावें, तो

$$\frac{य - २}{य - ७} - १ + \frac{य - १}{य - ६} - १ = \frac{य + २}{य - ३} - १ + \frac{य - ५}{य - १०} - १$$

अथवा $\frac{य - २ - य + ७}{य - ७} + \frac{य - १ - य + ६}{य - ६} = \frac{य + २ - य + ३}{य - ३}$

$+ \frac{य - ५ - य + १०}{य - १०}$

अथवा $\frac{५}{य - ७} + \frac{५}{य - ६} = \frac{५}{य - ३} + \frac{५}{य - १०}$

अथवा $\frac{१}{य - ७} + \frac{१}{य - ६} = \frac{१}{य - ३} + \frac{१}{य - १०}$, दोनों पक्षों को ५ से भाग देने पर,

अब

$$\frac{१}{य-७}-\frac{१}{य-१०}=\frac{१}{य-३}-\frac{१}{य-६}$$

अथवा $\frac{य-१०-य+७}{(य-७)(य-१०)}=\frac{य-६-य+३}{(य-३)(य-६)}$

अथवा $\frac{-३}{य^२-१७य+७०}=\frac{-३}{य^२-९य+१८}$

चूँकि दो बराबर भिन्नों के अंश बराबर हैं, इसलिये उनके हर भी बराबर होंगे।

इसलिये $य^२-१७य+७०= य^२-९य+१८$

अथवा $य^२-१७य-य^२+९य=१८-७०$

अथवा $-८य=-५२$

$$य=\frac{५२}{८}=६\frac{१}{२}$$

उदाहरण ७:—$\frac{१}{य+अ}+\frac{१}{य-अ}=\frac{१}{य^२-अ^२}$ इसमें य का मान बताओ ?

सरल करने के लिये हरों का लघुतम लेकर,

$$\frac{य-अ+य+अ}{य^२-अ^२}=\frac{१}{य^२-अ^२}$$

चूँकि दोनों पक्षों के हर बराबर हैं, अतः $२य=१$, $य=\frac{१}{२}$

उदाहरण ८:—$\frac{२य^२+२अ^२}{य^२-अ^२}-\frac{य-अ}{य+अ}+\frac{य+अ}{य-अ}=क$, इसमें य का मान निकालो।

$$\frac{२य^२ + २अ^२}{य^२ - अ^२} - \frac{(य - अ)^२ - (य + अ)^२}{(य + अ)\ (य - अ)} = क\ ;$$

अर्थात् $\frac{२य^२ + २अ^२}{य^२ - अ^२} - \frac{(य - अ + य + अ)\ (य - अ - य - अ)}{य^२ - अ^२} = क$

$$\frac{२य^२ + २अ^२}{य^२ - अ^२} - \frac{-४अय}{य^२ - अ^२} = क$$

$$\frac{(२य^२ + २अ^२) + ४अय}{य^२ - अ^२} = क$$

$$\frac{२\ (य + अ)^२}{(य + अ)\ (य - अ)} = क$$

$$\frac{२\ (य + अ)}{य - अ} = क$$

$$२(य + अ) = क\ य - क\ अ$$

$$-२य + क\ य = २अ + क\ अ$$

$$य\ (क - २) = अ\ (क + २)$$

$$\therefore\quad य = \frac{अ\ (क + २)}{क - २}$$

उदाहरण ९:—$(य - अ)^२ = क^२$, इसमें य का मान निकालो?

$$(य - अ)^२ - क^२ = ०$$

$$(य - अ + क)\ (य - अ - क) = ०.$$

यदि दो पदार्थों का गुणनफल शून्य है, तो उनमें से एक अवश्य शून्य होगा, इसलिये यदि $य - अ + क = ०.$

तो $य = क - अ$

और यदि $य - अ - क = ०$ तो $य = क + अ$ $\therefore य = क$

$\neq अ$

उदाहरण १०:— $\frac{१}{अ(अ-क)(अ-य)} - \frac{१}{क(अ-क)(क-य)} + \frac{१}{य(अ-य)(क-य)} = \frac{१}{अ^२क^२}$ इसमें य का मान निकालो ?

बाईं ओर का मान $= \frac{कय(क-य) - अय(अ-य) + अक(अ-क)}{यकअ(अ-क)(अ-य)\ क-य)}$

$= \frac{कय(क-य) - [अ^२य - अय^२ + अक^२ - अ^२क]}{अकय(अ-क)(अ-य)(क-य)}$

$= \frac{कय(क-य) - अ(क^२ - य^२) + अ^२(क-य)}{अकय(अ-क)(अ-य)(क-य)}$

$= \frac{क-य)\{कय + अ^२ - अक - अय\}}{अकय(अ-क)(अ-य)(क-य)}$

$= \frac{(क-य\{अ(अ-क) - य(अ-क)\}}{अकय(अ-क)(अ-य)(क-य)}$

$= \frac{(क-य)(अ-क)(अ-य)}{अकय(अ-क)(अ-य)(क-य)} = \frac{१}{अकय}$

$\therefore \frac{१}{अकय} = \frac{१}{अ^२क^२}$ यह समीकरण बना

$\therefore य = अक$ उत्तर हुआ ।

अभ्यास १२

नीचे लिखे समीकरणों का मूल्य निकालो ?

१. $२य + ४ = १२$

२. $२य - य = १४ - ६य$

३. $७(१ + २य) + २ = ३(४य + २) + ९$

४. $२(य - १५) = ५(य - ११) + ४$

५. $३(य - २) + ७(२य - ३) = ५(१ - २य) - ५९$

६. $१३य - ४(५य - ८) + १७ = ०$

७ $५(य - ३) + २ = २(य + १)$

८. $२(४य - ३) - ९ = ३य$

९. $४६ + १२(५य + २७) = ८\ ५ + य) - ३य$

१०. $८य + ५(य + ७) + ९(२य + २३) - ३(य + ६) = ०$

११. $(य - ७)(४य - २९) = (२य - ५)(२य - १७) + १$

१२. $(३य + २)(२य - ६) = (४ - ३य)(२ - २य) - २०$

१३. $(य + २)(२य + ५) = ४(य + १) + १३$

१४. $\frac{य}{२} + ५ = \frac{य}{३} + ७$

१५. $\frac{४य - ६}{३} - १ = \frac{१२ - २य}{६}$

१६. $\frac{य + १}{५} = \frac{य + २}{६} + १$

१७. $\frac{य}{२} + \frac{य}{४} = \frac{य}{३} + १७$

१८. $\frac{य}{२} + \frac{य}{३} - \frac{य}{४} = \frac{य}{४} + ५$

१९. $\frac{य - ६}{५} + \frac{य - ४}{३} = ८ - \frac{य - २}{७}$

२०. $\frac{य + ७}{२} + \frac{य + १३}{५} = \frac{य + २७}{४} - \frac{य + १७}{७}$

२१. $\frac{९य + ७}{२} - \left(य - \frac{य - २}{७}\right) = ३६$

२२. $\frac{७य+९}{४} - \left(य - \frac{२य-१}{९}\right) = ७$

२३. $\frac{२य-१३}{९} - \frac{य-१}{११} = \frac{य}{८} + \frac{य}{७} - ९$

२४. $\frac{७य-११}{८} - \frac{९य-१७}{१०} = \frac{७}{२०}$

२५. $५य - \frac{२य+४}{३} + १ = ३य + \frac{य+२}{३} + ७$

२६. $१ - ४य + ·५य = १·३ + ·६य$

२७. $२·३ य - ·६ य = ३·८ - ·२ य$

२८. $\frac{य}{·५} + \frac{य}{·७५} = ·४६$

२९. $\frac{य + ·७५}{·१२५} - \frac{य - ·२५}{·२५} = १५$

३०. $\frac{२य-३}{२·५} = \frac{३य-४}{१२·५} + ·२४$

३१. $\frac{य-५}{य-७} = \frac{य+३}{य+९}$

३२. $\frac{य-१}{य-२} = \frac{७य-११}{७य-२६}$

३३. $\frac{य+२}{य+५} + \frac{य - \frac{७}{३०}}{य-१} + \frac{२\frac{७}{३०}}{य+७} = २$

३४. $\frac{५य-१}{२य+३} = \frac{५य-३}{२य-३}$

३५. $\frac{३य-७}{४य-११} - \frac{२य-३}{३य-७} = \frac{३य-८}{४(य-३)} - \frac{२(य-७)}{३य-८}$

३६. $\frac{७य-४}{य-१}=\frac{७य-२६}{य-३}$

३७. $\frac{१}{य+२}-\frac{१}{य-७}=\frac{१}{य+४}-\frac{१}{य+९}$

३८. $\frac{१}{य-१}+\frac{१}{य+१}=\frac{३}{य^{२}-१}$

३९. $\frac{१}{य^{२}-५य+१७}-\frac{१}{य^{२}+४य+८}=\frac{८य}{य^{४}+६४}$

४०. $\frac{य+अ}{य-अ}-\frac{य-अ}{य+अ}=\frac{४क}{य^{२}-अ^{२}}$

४१. $\frac{य-अ}{क}=\frac{य-क}{अ}$

४२. $\frac{य}{अ+क}+\frac{य}{अ-क}=\frac{२अ}{अ^{२}-क^{२}}$

४३. $\frac{१}{य}=\frac{१}{अ}+\frac{१}{क}$

४४. $\frac{अ(क-य)}{क(अ-य)}=\frac{क}{अ}$

४५. $\frac{य+अ}{य-क}+\frac{य+क}{य-अ}=२$

४६. $\frac{य-३}{य-४}-\frac{य-२}{य-३}=\frac{य-१}{१९य-१२}$

४७. $\frac{१}{य-२}-\frac{६}{य-३}+\frac{६}{य-४}=\frac{२य^{२}-७य}{(य-२)(य-३)(य-४)}$

४८. $\frac{य+अ+क}{(अ-ग)(क-ग)(ग-य)}-\frac{य+अ+ग}{(अ-क)(क-ग)(क-य)}$

$$+\frac{य+क+ग}{(अ-क)(अ-ग)(अ-य)}=\frac{य+ग}{(अ-य)(क-य)(ग-य)}$$

४९. $\frac{य}{अ}+\frac{य}{क}+\frac{य}{ग}=१$

५०. $\frac{अ}{क}-\frac{क}{य}=\frac{ग}{अ}$

∴ एक वर्ण समी करण के उत्पादक प्रश्नः—

५५. एकवर्ण समीकरण के उत्पादक प्रश्नों को हल करने के लिये पहिले यह उचित और आवश्यक है, कि प्रश्न को समी करण के रूप में रखा जावे, और फिर समीकरण का मूल्य निकाल लेने से प्रश्न का उत्तर शीघ्र निकल आवेगा। जो उत्तर निकालना होता है उसको बहुधा अज्ञात राशि अर्थात् 'य' मान लेते हैं।

अब हम उदाहरण देकर यह दिखावेंगे कि ऐसे प्रश्न किस प्रकार सरलता से हल हो जाते हैं।

५६. उदाहरण १:—क, ख, और ग तीन मनुष्यों में ४२) रु० इस प्रकार बाँटो, कि क से ख को ४ गुणे, और ख से ग को आधे मिलें ?

मानलो कि क को य रुपये मिले। ख को ४ य मिले और ग को ४ य का ½ = २ य मिले। परन्तु कुल धन ४२ रु० है।

∴ य + ४ य + २ य = ४२ यह समीकरण बना

∴ ७ य = ४२ ∴ य = ६) क, को मिले।

∴ ख को ४ य अर्थात् २४ रु० और ग को २ य अथवा १२) मिलने चाहिये।

उदाहरण २ः—उस संख्या को बताओ, जिसको ७ से गुणन करने से १३२ से इतनी बढ़ जाती है जितनी कि पहिले वह छोटी थी ? मानलो कि संख्या य है, तो इसका ७ गुणा ७ य होगा। और यह १३२ से ७ य—१३२ बड़ी है, परन्तु पहिले यह १३२—य छोटी थी, और यह प्रश्नानुसार बराबर हैं। इसलिये हमारा समीकरण

७ य—१३२=१३२—य हुआ

∴ ७ य+य=१३२+१३२

∴ ८ य=२६४ य=३३

उदाहरण ३ः—एक मनुष्य कुछ आम लेने गया। तो उसने देखा कि यदि वह ३ पैसे प्रति आम के भाव से लेता है तो उसके सब दाम लग जावेंगे, परन्तु यदि वह दो पैसे प्रति आम ले तो १० पैसे बच रहेंगे, तो बताओ कि वह कितने आम लिया चाहता था ?

मान लो कि उसको य आम लेने थे तो ३ पैसे के भाव से ३ य पैसे हुए, और उस के पास कुछ न बचा। परन्तु २ पैसे प्रति आम के भाव से २ य पैसे के आम लिये और १० पैसे बच रहे। इसलिये २ य+१० पैसे हुए ∴ २ य+१०=३ य

इस समीकरण का मूल्य निकाला तो य=१०

∴उसे १० आम लेने थे। उत्तर

उदाहरण ४ः—दो मनुष्यों की अवस्थाओं में १० वर्ष का अन्तर है, और १५ वर्ष पहिले बड़े की आयु छोटे की आयु से दूनी थी। प्रत्येक मनुष्य की आयु बताओ ?

मानलो कि इस समय छोटे मनुष्य की अवस्था य वर्ष है। तो बड़े की (य + १०) वर्ष हुई। परन्तु १५ वर्ष पहिले बड़े की (य + १० − १५) वर्ष और छोटे की (य − १५) वर्ष हुई। परन्तु बड़े की आयु छोटे से दूनी थी

$$\therefore (य + १० - १५) = २ (य - १५)$$

$$\because य - ५ = २ य - ३०$$

$$\therefore २ य - य = ३० - ५ \qquad \therefore य = २५$$ वर्ष

छोटे मनुष्य की आयु

$\therefore$ बड़े मनुष्य की आयु य + १० = २५ + १० = ३५ वर्ष हुई।

उदाहरण ५:—एक मनुष्य और उस के पुत्र की अवस्था मिलकर ५० वर्ष है, परन्तु दूनी पिता की आयु ८ गुनी पुत्र की आयु के तुल्य है, तो बताओ कि उनकी आयुएं क्या हैं ?

मानलो कि पिता की आयु य वर्ष है तो पुत्र की आयु (५० − य) वर्ष होगी, और $\because$ दूनी आयु पिता की = ८ गुनी पुत्र की आयु

$\therefore २ \times य = ८ (५० - य)$ यह समीकरण बना

इस समीकरण का मूल्य पिता की आयु होगी।

$$२ य = ४०० - ८ य$$

$\therefore २ य + ८ य = ४०० \therefore य = ४०$ वर्ष पिता की आयु

$\therefore ५० - ४० = १०$ वर्ष पुत्र की आयु

उदाहरण ६:—एक गड़रिया ने १०८) रु० में दो प्रकार की ११ भेड़ें खरीदीं। एक प्रकार की के ९) रु० और दूसरे की के १२) रु० पूँछ दिये, तो हर प्रकार की कितनी कितनी थीं ?

मान लो कि एक प्रकार की य भेड़ें थीं, तो दूसरे प्रकार की ११ − य हुईं।

∴प्रथम प्रकार की य भेड़ों का मूल्य ९ य रु० और दूसरे प्रकार की ११ − य भेड़ों का मूल्य (११ − य) × १२ हुआ ∴९ य + (११ − य) १२ = १०८ यह समीकरण बना ९ य + १३२ − १२ य = १०८

१३२ − १०८ = १२ य − ९ य

२४ = ३ य ∴य = ८

११ − ८ = ३ ∴८ · ३ उत्तर

उदाहरण ७ः—एक सिपाही को वर्ष भर में ९ मुहरें और वर्दी ठहरी थी। परन्तु ५ महीने पीछे उसका नाम कट गया और उसे २ मुहरें और वर्दी मिली। कहो उसकी वर्दी का मोल क्या था ?

मानलो कि वर्दी का मोल य मुहरें था

तो १२ महीने की नौकरी = ९ + य मुहरें

∴५ महीने की नौकरी = $\frac{९ + य}{१२}$ × ५ = २ + य

$\frac{(९ + य)\ ५}{१२}$ = २ + य यह समीकरण बना

∴ ४५ + ५य = २४ + १२य

∴ ४५ − २४ = १२य − ५य

२१ = ७य ∴ य = ३ मुहरें वर्दी का मूल्य

उदाहरण ८ः—एक पुरुष विवाह होने के पीछे अपनी आयु

की तिहाई और स्त्री की आयु की चौथाई साथ रहा, और पुरुष स्त्री से ८ वर्ष बड़ा था। तथा स्त्री २० वर्ष पीछे और भी जीती रही। कहो विवाह के समय कितने कितने बड़े थे ?

मान लो कि पुरुष की पूरी आयु य वर्ष की थी तो उस समय स्त्री की आयु (य - ८) वर्ष होगी। और स्त्री की पूरी आयु य - ८ + २० अथवा य + १२ वर्ष हुई।

परन्तु प्रश्नानुसार विवाह के पीछे का समय

$$= \text{पुरुष की आयु का } \frac{१}{३} = \frac{य}{३}$$

$$= \text{स्त्री की आयु का } \frac{१}{४} = \frac{य + १२}{४}$$

$$\therefore \frac{य}{३} = \frac{य + १२}{४} \text{ यह समीकरण बना}$$

$$\therefore ४य = ३य + ३६ \qquad \therefore ४य - ३य = ३६$$

$$\therefore य = ३६ \text{ वर्ष}$$

अर्थात् $३६ \times \frac{१}{३} = १२$ वर्ष विवाह के पीछे पुरुष जिया

$\therefore ३६ - १२ = २४$ वर्ष विवाह समय पुरुष की आयु थी।

$\therefore$ स्त्री की आयु विवाह समय $= २४ - ८ = १६$ वर्ष हुई।

उदाहरण ९ः—दो वृक्षों पर दो झुंड चिड़ियों के बैठे थे। एक वृक्ष पर से एक चिड़िया ने कहा कि यदि तुम में से दो चिड़ियाँ हमारे झुंड में आजावें, तो हम बराबर हो जावें। दूसरे वृक्ष की चिड़ियों में से एक ने उत्तर दिया कि यदि तुम में से ४ चिड़ियाँ हमारे झुण्ड में आजावें, तो हम तुमसे दूनी होजावें। तो कहो कितनी कितनी चिड़ियाँ प्रत्येक झुण्ड में थीं ?

मानलो कि एक वृक्ष से दूसरे वृक्ष पर २ चिड़ियाँ आगईं और बराबर बराबर होगईं और अब प्रत्येक झुण्ड की संख्या य है। तो २ चिड़ियाँ आने से पहिले एक में य − २ और दूसरे में य + २ चिड़ियाँ होंगी। अब यदि य − २ में से ४ चिड़ियाँ निकलकर, य + २ में जा मिलें तो वह दूनी होजाती है।

$$(य - २ - ४) \times २ = य + २ + ४$$

यह हमारा समीकरण बना

$$\therefore २य - १२ = य + ६$$

$$\therefore य = १८$$

∴ पहिले एक वृक्ष पर १८ − २ = १६ चिड़ियाँ और दूसरे पर १८ + २ = २० चिड़ियाँ थीं।

उदाहरण १०:—एक संख्या में दो स्थानीय संख्या हैं इकाई की संख्या से दहाई की संख्या ५ बड़ी है, यदि संख्या में से स्थानीय संख्याओं के योग का ५ गुणा घटाया जावे, तो स्थानीय संख्या बदल जाती है तो उस संख्या को बताओ?

मानलो कि इकाई पर की स्थानीय संख्या य है तो दहाई पर की य + ५ हुई। इसलिये संख्या (य + ५) × १० + य हुई।

यदि इसमें से (य + य + ५) ५ अथवा (२य + ५) ५ घटाया जावे तो संख्या उलट जाती है

$\because \{ (य+५) १० + य \} - (२य+५) \times ५ = य \times १० + (य + ५)$ यह हमारा समीकरण बना—

$$\because ११य + ५० - १०य - २५ = १०य + य + ५$$

$$\because य + २५ = ११य + ५$$

∵ ११य − य = २५ − ५

∵ १०य = २०   य = २

∵ दहाई पर को संख्या = य + ५ = ७

∴ संख्या   ७२ हुई

अभ्यास १३

१. कुछ लड़कों को मैं कुछ नीबू बाँटा चाहता हूँ यदि मैं हर एक लड़के को ४ नीबू देता हूँ तो तीन नीबुओं की कमी पड़ती है यदि प्रत्येक लड़के को तीन-तीन देता हूँ तो ९ नीबू बच रहते हैं तो बताओ कि कितने लड़के और कितने नीबू हैं ?

२. एक गड़रिया ने कुछ रुपये में कुछ भेड़ें मोल लीं, यदि वह प्रति भेड़ ३ रु० में बेचता है तो उसको १५) का घाटा पड़ता है और यदि प्रति भेड़ ४) में बेचता है तो २५) का लाभ होता है तो बताओ उसने कितनी भेड़ें कितने में मोल लीं ?

३. यज्ञदत्त से सत्यव्रत पर तिगुने आम हैं यदि दोनों को पाँच-पाँच आम और दे दिये जावें तो यज्ञदत्त से सत्यव्रत पर दूने रहेंगे तो बताओ उन पर कितने कितने आम हैं ?

४. मोहन व सोहन ने समान धन लगा व्यौपार किया एक वर्ष पीछे मोहन को २०) लाभ और सोहन को १०) घाटा हुआ, और मोहन के पास सोहन से दूना धन होगया तो बताओ पहिले धन कितना था ?

५. दो संख्याओं का अन्तर ३ है और यदि बड़ी के तिगुने से छोटी का पचगुना घटाया जाय, तो शेष एक बचता है तो वह संख्या क्या है ?

६. १२) मन की ५)रु० मन खाँड़ में ८)रु० मन की कै मन मिलानी चाहिये जिससे वह मिश्रित चीनी९)रु० मन बेची जाय?

७. ५ रु० सेर और ३ रु० सेर की कुछ चाय मिलादी है अब इस मिश्रित १२ सेर का मोल ५२) है कहो एक प्रकार की कितनी कितनी है ?

८. एक मनुष्य ने १५ रु० दर की ६ मोहरों के ऋण चुकाने में कुछ तो रु० दिये और उनसे दूनी पावलियाँ दीं कहो सब रु० और पावलियाँ कितने कितने दिये ?

९. कुछ मनुष्यों ने बेलनगंज से एक डोंगी ६ पैसे प्रति मनुष्य ठहराकर इस नियम पर ताजगंज के लिये करी कि जो मनुष्य मार्ग में दूसरे और आजावेंगे तो उनके प्रमाण से ४ पैसे प्रति मनुष्य काट लेवेंगे। अब जितने मनुष्य प्रथम थे मार्ग में उनसे तीन कम और आ मिले। इससे पहिले मनुष्यों को पाँच पाँच पैसे देने पड़े कहो वे संख्या में कितने थे ?

१०. मैंने कुछ अमरूद पैसे के ३ के भाव से मोल लिये और उस संख्या का $\frac{५}{६}$, पैसे के चार के भाव से। उन सबको ३ पैसे के ८ के भाव से बेचने से ३$\frac{१}{२}$ पैसे लाभ हुआ, तो पहिले मैंने कितने अमरूद मोल लिये ?

११. उस संख्या को बताओ जिसका चतुर्थांश नवाँश से ५ अधिक है ?

१२. दो धनों का मूल्य ५४ पौं० १२ शिलिंग है, और एक में जितने पौं० है दूसरे में उतने ही शि० हैं। तो प्रत्येक धन का क्या मूल्य है ?

१३. एक मनुष्य से पूछा गया कि तुम्हारी आयु क्या है। तो उसने उत्तर दिया कि १० वर्ष हुए मेरी आयु मेरे पुत्र की आयु से पाँच गुनी थी, परन्तु २० वर्ष पीछे मेरी आयु मेरे पुत्र से २ गुनी होगी। तो उस मनुष्य की क्या आयु है ?
नोटः—उपरोक्त प्रश्न में मनुष्य की वर्तमान आयु 'य' मानलो

$\therefore$ पुत्र की वर्तमान आयु $= \frac{1}{5}$ (य − १०) + १० + २० $= \frac{1}{2}$ (य + २०)

१४. दो नगरों का अन्तर १०० कोस है। उन दो नगरों से 'क' और 'ख' यह दो मनुष्य परस्पर मिलने के लिये चले और ५ घंटे बाद मिले। यदि ख की अपेक्षा क, ४ कोस प्रति घंटा अधिक चलता है तो 'क' और 'ख' की चाल प्रति घंटा क्या होगी ?

१५. मोहन के पास ४ रत्न थे और उसको १५०) रु० का ऋण चुकाना था और सोहन के पास ३ रत्न थे, और उसको ८०) रु० का ऋण चुकाना था। दोनों ने एक भाव से रत्नों को बेच डाला और अपना अपना ऋण चुकाने पर बराबर बराबर धन शेष रहा तो बताओ कि एक रत्न कितने को बिका ?

१६. दो वृक्षों पर पक्षियों के दो झुण्ड बैठे थे। एक वृक्ष पर से एक पक्षी ने कहा कि यदि तुममें से एक पक्षी हम में आ मिले तो हम बराबर बराबर हो जावें। तो दूसरे वृक्ष पर से एक पक्षी ने उत्तर दिया कि यदि तुम में से एक पक्षी हम में आ जावे तो हम तुम से दूने हो जावें। तो कहो कि प्रत्येक वृक्ष पर कितने कितने पक्षी थे ?

१७. एक धन 'क' 'ख' और 'ग' में इस तरह बाँटना है, कि क को धन के आधे से ३०) रु० कम मिलें; ख को धन के तिहाई से १०) रु० कम, और ग को चौथाई से ८) रु० अधिक मिलें। तो धन क्या है और प्रत्येक को क्या मिलेगा ?

१८. एक पुरुष ४ कोस प्रति घंटे की गति से गया और ३ कोस प्रति घंटे की गति से लौट आया। इसमें उसको २१ घंटे लगे कहो वह कितनी दूर तक गया ?

१९. एक मनुष्य ने कुछ कबूतर और कुछ तोते मिल के २५ पक्षी १२।=) में मोल लिये। उसमें हर एक कबूतर का मोल ॥-) और हर एक तोते का मोल ।=) था तो बताओ कि इन पक्षियों में कितने कबूतर और कितने तोते थे।

२०. वह पास की दो संख्या कौन हैं कि जिनके वर्गों का अन्तर ३१ है ?

२१. दो अंकों की एक संख्या ऐसी है कि उसके एक स्थान के अंक से दश स्थानीय अंक ३ गुणा है और यदि उस संख्या में से स्थानीय अंकों के योग का ४$\frac{1}{2}$ गुणा घटा दिया जावे तो शेष संख्या में उन्हीं दो अंकों की स्थिति पलट के रहती है। तो वह संख्या क्या है ?

२२. एक बाबू ने अपनी सेना वर्गाकार खड़ी की तो १०० मनुष्य बच रहे। तब उसने वर्ग के अनुसार ही एक एक पंक्ति में एक एक मनुष्य बढ़ा दिया। तब वर्ग का आकार पूरा होने से १ मनुष्य की कमी पड़ती है। तो बताओ कि उस बाबू की सेना कितनी थी ?

२३. एक तालाब में कुछ कमल थे और उस पर बैठने के लिये एक भ्रमरों का समूह आया। आते ही पहिले एक एक कमल पर एक एक भ्रमर बैठा। तब एक भ्रमर शेष रहा फिर सब उड़े और एक एक कमल पर दो दो बैठे तब एक कमल शेष रहा। तो उस तालाब में कमल कितने थे और वे भ्रमर कितने थे ?

२४. दो अंकों की एक संख्या है, यदि उसमें उन दो अंकों के योग का भाग दें तो ६ आता है और यदि उस संख्या में से ९ घटा देवें तो शेष में उन्हीं की स्थिति पलट के रहती है। कहो वह संख्या क्या है ?

२५. ८४ के ऐसे दो भाग करो कि पहिले का द्वादशांश और दूसरे का चतुर्थांश मिल कर ११ हों ?

२६. ६० के ऐसे ४ खण्ड करो कि यदि पहिले में से ३ घटावें, दूसरे में ११ जोड़ दें, तीसरे को ४ से गुणा करें, और चौथे में २ का भाग दें, तो चारों फल परस्पर बराबर हों ?

२७. १४४ के ऐसे तीन भाग करो कि पहिले का $\frac{१}{३}$, दूसरे का $\frac{१}{४}$, और तीसरे का $\frac{१}{५}$ बराबर हों ?

२८. एक गड़रिया ने ६० भेड़ों में से कुछ भेड़ों को २० प्रति सैकड़ा और शेष को ८ प्रति सैकड़ा लाभ पर बेचा, यदि उसे कुछ भेड़ों पर १० प्रति सैकड़ा लाभ हुआ हो तो कितनी कितनी भेड़ें दोनों बार बिकीं।

२९. मैंने दो घोड़े ६०) रु० में मोल लिये। उनमें से एक को १५ प्रति सैकड़ा हानि पर और दूसरे को १९ प्रति सैकड़ा

लाभ पर बेचने से दोनों की बिक्री के दाम बराबर मिले। प्रत्येक घोड़ा कितने में बिका।

३०. ७७५) के ऐसे दो खण्ड करो कि एक खण्ड का ३$\frac{१}{२}$ वर्ष का ब्याज ४$\frac{१}{२}$ प्रति सैकड़ा से दूसरे खण्ड के ४ वर्ष के ब्याज ५ प्रति सैकड़ा के हिसाब से १२) कम हो।

३१. पिता की आयु पुत्र की आयु से तिगुनी है—आज से १२ वर्ष व्यतीत होने पर पिता की आयु, पुत्र की आयु से केवल दुगुनी होगी, तो इस समय पिता और पुत्र की आयु क्या है?

३२. ३२० के ऐसे ४ भाग करो कि जो पहिले भाग में २ जोड़ दें, दूसरे में से ३ घटादें, और तीसरे को ४ से गुणा करें और चौथे में ५ का भाग दें, तो चारों फल बराबर हों?

३३. एक अफसर ने अपनी सेना वर्गाकार खड़ी की तो १०० मनुष्य बच रहे। तब उसने वर्ग के अनुसार ही एक एक पंक्ति में एक एक मनुष्य बढ़ा दिया, तो मालूम हुआ कि वर्ग का आकार पूरा होने में ४१ मनुष्य की कमी है। तो बताओ कि उस अफ़सर के पास कितने मनुष्य थे।

३४. दो अङ्कों की एक ऐसी संख्या है कि उसमें इकाई के स्थान से दश के स्थान का अङ्क दूना है। यदि उस संख्या में से २७ घटादें तो शेष संख्या में उन अङ्कों की स्थिति बदल जाती है। तो वह संख्या क्या है?

३५. दो अङ्कों की एक ऐसी संख्या है कि उसमें इकाई के स्थान से दश के स्थान का अङ्क ८ गुना है। यदि उस संख्या में से ६३ घटादें तो शेष संख्या में उन अङ्कों की स्थिति बदल जाती है। तो वह संख्या क्या है?

३६. एक सज्जन ने १०० रुपये कुछ पुरुष, स्त्री, और बच्चों में इस तरह बाँटे कि पुरुष को ८), स्त्री को ५) और बच्चे को १) मिला—स्त्रियों की संख्या पुरुषों से आधी थी और लड़कों की पुरुषों से दूनी—तो बताओ कि कितने पुरुष, स्त्री और बच्चे थे।

३७. २४ आदमी किसी काम को १८ दिन में कर सकते हैं। जब वह कुछ दिन काम कर चुके तो ६ आदमी अलग होगये। शेष मनुष्यों को काम पूरा करने में ३ दिन अधिक लगे—तो बताओ वह ६ आदमी कितने दिन काम करके अलग हुए थे।

३८. २० आदमी किसी काम को १६ दिन में कर सकते हैं। तो बताओ काम पूरा होने से कितने दिन पहिले १० आदमी और बढ़ा दिये जावें कि काम नियत समय से पहिले ही हो जावे।

३९. किसी मनुष्य ने कुछ नीबू पैसे के ३ के भाव से मोल लिये और उतने ही नीबू पैसे के ४ के भाव से मोल लिये—फिर वह सब नीबू २ पैसे के ७ के भाव से बेच डाले और १ पैसे का घाटा रहा। तो उस मनुष्य ने कितने कितने नीबू मोल लिये।

४०. एक मनुष्य ने किसी सराफ़ से १३) रु० की कुछ अठन्नी और कुछ चवन्नी सब ३८ लीं। तो बताओ उनमें कितनी अठन्नी और कितनी चवन्नी थीं।

दो अज्ञात राशियों के समीकरण

५७. हम पहिले कह आये हैं कि जब एक मान दूसरे मान के बराबर अज्ञात राशि के किसी विशेष मूल्य के कारण होता है तो उसको समीकरण कहते हैं और अज्ञात राशि के मूल्य निकालने को समीकरण का मूल्य निकालना कहते हैं। जब समीकरण में एक ही अज्ञात राशि होती है तो उसको एक वर्ण समीकरण कहते हैं। यदि किसी समीकरण में दो अज्ञात राशि हों तो उसको दो वर्ण समीकरण अथवा दो अज्ञात राशियों का समीकरण कहते हैं।

इन समीकरणों में, चाहे वह एकवर्ण हों, अथवा द्विवर्ण समीकरण, अज्ञात राशि 'य' का घात एक ही माना गया है। द्विवर्ण समीकरण में दो अज्ञात राशियाँ 'य' और 'र' होंगी और इनका घात भी एक ही माना जावेगा—जब अज्ञात राशि का घात वर्ग अथवा घन, अथवा इससे भी अधिक हो तो उनके भी समीकरण होते हैं। परन्तु विस्तार भय से उनका वर्णन इस छोटी सी पुस्तक में नहीं करेंगे—अब हम दो अज्ञात राशियों वाले द्विवर्ण एक घात समीकरण का वर्णन करते हैं।

५८. जब एक राशि अज्ञात हो तो एक समीकरण दिये जाने पर अज्ञात राशि का मूल्य निकल आता है। परन्तु यदि दो राशि अज्ञात हों तो एक समीकरण दिये जाने पर उन राशियों का मूल्य निकलना असम्भव है। दो अज्ञात राशियों के मूल्य निकालने के लिये दो समीकरण होने चाहिये। उदा-

हरणार्थ यदि $\frac{य}{४}+\frac{य}{५}=\frac{य}{८}+१३$ समीकरण दिया हुआ हो तो य=४० निकाल सकते हैं। परन्तु यदि केवल २य - ३र=४ समीकरण दिया हो तो य, र का मूल्य नहीं निकल सकता है। इसलिये २य - ३र=४ और

३य + २र = ३२ यह दो समीकरण दिये हों तो य और र का मूल्य निकल सकता है।

५९. अब हम द्विवर्ण समीकरण निकालने की रीतियों का वर्णन लिखते हैं।

पहिली रीतिः—दी हुई समीकरणों में से एक समीकरण द्वारा 'य' का मूल्य निकालो, और फिर इसी तरह दूसरे समीकरण से भी 'य' का मूल्य निकालो। इन दोनों को बराबर बराबर रख के 'र' अज्ञात राशि का एक वर्ण समीकरण मिलेगा, जिसको निकालने से 'र' का मूल्य निकल आवेगा—'र' का मूल्य निकलने से 'य' का मूल्य निकलने में कोई कठिनाई नहीं होगी।

उदाहरणः—२य - ३र=४

३य + २र=३२ तो 'य' और 'र' का मूल्य बताओ ?

पहिले समीकरण से २य=४ + ३र

$$\therefore य=\frac{४ + ३र}{२}$$

इसी प्रकार द्वितीय समीकरण से ३य=३२ - २र

$$\therefore य=\frac{३२ - २र}{३}$$

अतः $\frac{४+३र}{२} = \frac{३२-२र}{३}$, क्योंकि प्रत्येक = य

$\therefore$ ३(४+३र) = २(३२ - २र); ६ से गुणा करने पर

$\therefore$ १२+९र = ६४ - ४र

$\therefore$ ९र+४र = ६४ - १२

$\therefore$ १३र = ५२ $\therefore$ र = ४

$\therefore$ य = $\frac{४+३र}{२} = \frac{४+१२}{२}$ = ८

नोटः—इस उदाहरण में हमने दोनों समीकरणों से 'य' का मूल्य निकाला है। परन्तु यदि हम दोनों समीकरणों से पहिले 'र' का मूल्य निकालें तो भी कोई आपत्ति नहीं है परिणाम एक ही होगा, यथा

पहिली समीकरण से र = $\frac{२य-४}{३}$

और द्वितीय समीकरण से र = $\frac{३२-३य}{२}$

$\therefore$ $\frac{२य-४}{३} = \frac{३२-३य}{२}$, क्योंकि प्रत्येक = र,

$\therefore$ ४य - ८ = ९६ - ९य, ६ से गुणा करने से,

$\therefore$ ४य + ९य = ९६ + ८

$\therefore$ १३य = १०४ $\therefore$ य = ८

$\therefore$ र = $\frac{२य-४}{३} = \frac{१६-४}{३}$ = ४

६०. दूसरी रीति:—यह रीति भी पहिली रीति से कुछ मिलती है और कुछ अंश में भिन्न है। इसमें एक समीकरण से एक अज्ञात राशि 'य' अथवा 'र' का मूल्य निकालते हैं और जो मूल्य निकलता है उसको उस अज्ञात राशि के स्थान में द्वितीय समीकरण में रखते हैं जिससे एक वर्ण समीकरण मिल जाता है और उसको निकालने से एक अज्ञात राशि निकल आती है। फिर उसका मूल्य रखने से दूसरी अज्ञात राशि भी निकल आती है।

उदाहरण— $२य = १७ - ३र$

और $७र = ९य + २६$ इनमें 'य' और 'र' का मूल्य निकालो ?

पहिली समीकरण से $य = \frac{१७ - ३र}{२}$

'य' के इस मूल्य को द्वितीय समीकरण में रखा तो

$$७र = ९ \times \frac{१७ - ३र}{२} + २६$$

$\therefore १४र = १५३ - २७र + ५२$

$\therefore १४र + २७र = २०५$

$\therefore ४१र = २०५$ $\therefore र = ५$

अब $य = \frac{१७ - ३र}{२} = \frac{१७ - १५}{२} = १$

नोट—इस उदाहरण में हमने प्रथम समीकरण से 'य' का मूल्य निकालकर द्वितीय समीकरण में रखा है। जिससे 'र' का

मूल्य निकल आया। यदि हम पहिले 'र' का मूल्य निकालकर द्वितीय समीकरण में रखते तो भी परिणाम एक ही होता और 'य' और 'र' के मूल्य निकल आते—पाठक इसको स्वयं करलें। स्थानाभाव के कारण हम इसको लिखना आवश्यक नहीं समझते हैं।

६१. तीसरी रीति—यह रीति ही प्रायः काम में लाई जाती है इसलिये पाठक इसको ध्यान से पढ़ें। चूँकि एक समीकरण को किसी अङ्क से गुणा करने से कोई अन्तर नहीं पड़ता है अतः दोनों समीकरणों को ऐसे ऐसे अङ्कों से गुणा करते हैं कि जिसके बाद दोनों समीकरणों को जोड़ने अथवा परस्पर घटाने से जो समीकरण मिले उसमें केवल एक ही अज्ञात राशि हो। इस अज्ञात राशि का मूल्य निकल आता है। फिर दूसरी अज्ञात राशि का मूल्य निकालना कुछ कठिन नहीं है।

उदाहरण :—३य = ५र - ४६

और २र = ९य - ८३ इनमें 'य' और 'र' का मूल्य निकालो ?

प्रथम समीकरण - ३य + ५र = ४६

और द्वितीय समीकरण - ९य + २र = ८३

प्रथम समीकरण को ३ और द्वितीय को - १ से गुणा किया

तो - ९य + १५र = १३८

और ९य - २र = ८३

इन दोनों समीकरणों को जोड़ा तो १३र = २२१

∴ र = १७

अब $३य = ५र - ४६ = ५ \times १७ - ४६ = ८५ - ४६$

$= ३९ \qquad \therefore य = १३$

नोट—थोड़े से अभ्यास के बाद पाठक इस रीति को बड़ी सरल और उपयोगी प्रतीत करेंगे।

६२. चौथी रीति:—यह रीति प्रथम, द्वितीय और तृतीय रीतियों का मिश्रण रूप है। अथवा यों कहना चाहिये कि समीकरण निकालने के कुछ अभ्यास के बाद विशेष विशेष युक्तियों से कठिन कठिन समीकरणों को निकाला जाता है। हम कुछ उदाहरण देकर इन युक्तियों का दिग्दर्शन कराते हैं।

उदाहरण १—यदि $य^२ - र^२ = २१$

और $य + र = ७$ तो 'य' और 'र' का मूल्य बताओ ?

$\because य^२ - र^२ = (य + र)(य - र) = २१$

$\because$ पहिली समीकरण को दूसरे से भाग दिया, तो

$य - र = ३$

और $य + र = ७$

$\therefore २य = १०$ अर्थात् $य = ५$

और $र = ७ - य = २$

उदाहरण २:—$\frac{२५}{य} + \frac{१८}{र} = ११$

$\frac{३}{४य} - \frac{२}{५र} = \frac{१}{६०}$ तो य और र का मूल्य निकालो ?

दूसरे समीकरण को ४५ से गुणा करने पर

$$\frac{१३५}{४य} - \frac{१८}{र} = \frac{४५}{६०} = \frac{३}{४}$$

और $$\frac{२५}{य} + \frac{१८}{र} = ११$$

इन दोनों समीकरणों को जोड़ने पर

$$\frac{१}{य}\left(\frac{१३५}{४} + २५\right) = \frac{३}{४} + ११$$

$$\therefore \frac{१}{य} \times \frac{१३५ + १००}{४} = \frac{३ + ४४}{४}$$

$$\therefore \frac{२३५}{य} = ४७ \qquad \therefore य = \frac{२३५}{४७} = ५$$

$$\therefore \frac{२५}{५} + \frac{१८}{र} = ११$$

$$\therefore \frac{१८}{र} = ११ - ५ = ६$$

$$\therefore र = \frac{१८}{६} = ३$$

उदाहरण ३:—यदि $$\frac{य र}{७य - ८र} = \frac{१}{३}$$

और $$\frac{५य र}{७य + ६र} = \frac{१}{२}$$

तो य और र का मूल्य बताओ ?

एक समीकरण का दूसरे में भाग देने पर

$$\frac{५य र}{७य + ६र} \times \frac{७य - ८र}{य र} = \frac{१}{२} \times \frac{३}{१}$$

$$\therefore \frac{७य - ८र}{७य + ६र} = \frac{३}{१०}$$

$$\therefore १०(७य - ८र) = ३(७य + ६र)$$

$$\therefore ७०य - ८०र = २१य + १८र$$

$$\therefore य(७० - २१) = र(८० + १८)$$

$$\therefore ४९य = ९८र \qquad \therefore य = २र$$

य के इस मूल्य को प्रथम समीकरण में रखा, तो

$$\frac{२र \times र}{७ \times २र - ८र} = \frac{१}{३} \qquad \therefore \frac{२र}{६} = \frac{१}{३} \qquad \therefore र = १$$

$$\therefore य = २र = २$$

उदाहरण ४:—यदि $य^२ + ५य = ४र^२ - ७र + ८९$ ····· (१)
और $य + २र = १४$ ························ (२)

तो य और र का मूल्य निकालो ?

प्रथम समीकरण से $य^२ - ४र^२ = ८९ - ५य - ७र$

और $य + २र = १४$

$$\therefore \text{भाग देने पर } य - २र = \frac{८९ - ५य - ७र}{१४}$$

अर्थात् $१४य - २८र = ८९ - ५य - ७र$

अथवा $१४य + ५य = ८९ - ७र - २८र$

$$\therefore १९य = ८९ + २१र.$$

द्वितीय समीकरण से $१९य = १४ \times १९ - ३८र$

$$\therefore ८९ + २१र = २६६ - ३८र$$

$$\therefore (३८ + २१)र = २६६ - ८९$$

$$\therefore र = \frac{१७७}{५९} = ३$$

$$\therefore य = १४ - २र = ८$$

अभ्यास १४.

नीचे लिखे समीकरणों में 'य और र' का मूल्य निकालो ?

१. $२य + ५र = २६$ और $५य + ६र = ३९$

२. $२य - ५र = २$ और $५य + ३र = ३६$

३. $५य - ६र = २८$ और $३य + ४र = ३२$

४. $३य = ३१ - ५र$ और $२र = ७य - ४१$

५. $४य = ३५ + ५र$ और $३य + ७र = ३७$

६. $\frac{य + १}{२} + ३र = २४$ और $५य + \frac{२र + १}{३} = ३०.$

७. $\frac{३य - १}{४} + २र = १३$ और $य + \frac{र + २}{३} = ९$

८. $\frac{२}{य} + \frac{३}{र} = ४$ और $\frac{३}{य} + \frac{२}{र} = ३\frac{१}{२}$

९. $\frac{यर}{य + र} = २$ और $\frac{१}{य} - \frac{१}{र} = \frac{१}{६}$

१०. $\frac{य}{र} = \frac{य}{र + ४} + \frac{१}{२}$ और $\frac{य}{र} = \frac{य}{र - ३} - \frac{१}{२}$

११. $\frac{य}{३} + \frac{}{४} = ७\frac{३}{४}$ और $\frac{य}{४} - \frac{र}{६} = \frac{१}{२}$

१२. $५य + \frac{र + ४}{५} = ८३$ और $३र - \frac{य - ७}{९} = ३२$

१३. $\frac{य}{५} + \frac{र}{७} = १५$ और $\frac{य}{७} + \frac{र}{८} = १२$

१४. $\frac{य + ४}{५} - \frac{र + ३}{७} = ३$ और $\frac{य - ५}{६} - \frac{र - ७}{८} = २$

१५. $\frac{\text{य}+१}{\text{र}}=\frac{१}{२}$ और $\frac{\text{य}}{\text{र}+१}=\frac{१}{३}$

१६. $\frac{१}{\text{र}}+\frac{१}{\text{य}}=\frac{१}{६}$ और $\frac{१}{\text{र}}-\frac{१}{\text{य}}=\frac{१}{३०}$

१७. $\frac{३\text{यर}}{\text{य}+२\text{र}}=\frac{३}{२}$ और $४\text{य}-\frac{३\text{य}}{\text{र}}=२$

१८. $\frac{\text{य}}{\text{र}}=\frac{\text{य}}{\text{र}+४}+१$ और $\frac{\text{य}}{\text{र}}=\frac{\text{य}}{\text{र}-२}-१$

१९. $(२\text{य}+३)(३\text{र}+४)=६८+(\text{य}+२)(६\text{र}-१)$
और $५\text{य}-७\text{र}=१४$

२०. $\text{य}^{३}-\text{य}^{२}+\text{यर}=\text{र}^{३}+३\text{र}^{२}+१०$ और $\text{य}-\text{र}=१$

प्रश्नोत्तरावली

अभ्यास १

१.	११५	२.	९५	३.	५	४.	६ फ़ीट
५.	६ गज़	६.	२०	७.	३६	८.	४४८०
९.	४२	१०.	११५२	११.	७२०		

अभ्यास २

१.	०	२.	४	३.	१	४.	$४\frac{१}{३}$
५.	$६\frac{१}{३}$	६.	$\frac{१}{२}$	७.	२४	८.	$६\frac{५}{६}$
९.	–२	१०.	३६	११.	१५	१२.	२५
१३.	१४	१४.	२२	१५.	२६	१६.	५६४
१७.	०	१८.	३६	१९.	३२	२०.	१३
२१.	३						

अभ्यास ३

१.	१२	२.	०	३.	५०	४.	४८
५.	१	६.	१६	७.	९	८.	१८
९.	३	१०.	११	११.	२१	१२.	३
१३.	३, १३, ६०, ५			१६.	२	१७.	४५
१८.	३६	१९.	३	२२.	३७	२३.	५
२४.	२१६	२५.	२				

अभ्यास ४

१. ४   २. २ अ   ३. – ५   ४. – ४

५. – २अ   ६. – ६ अ   ७. – ३अ ब   ८. ८ – ९अ^{२}ब

९. ४अबस   १०. – ९क^{२} ११. ९   १२. $१\frac{४}{७५}$

१३. ३३   १४. ३०   १५. ०   १६. – १

अभ्यास ५

१. १०   २. ०   ३. ४अ

४. ५ अ^{२} ५. – ३ क^{२} ६. ०

७. ५क – ४अ   ८. ४ब + ७स   ९. क – ख

१०. – २क + २ख   ११. ०   १२. १००अ + २क

१३. क^{३} + ३क^{२} – १६क – ४   १४. अक – २क^{२} १५. ५क – ख – ६अ

१६. ११क – ११   १७. ३क + ४   १८. ३क – २

१९. क – ८   २०. ५क + $४\frac{१}{३}$ २१. – २०

अभ्यास ६

१. ४क   २. – क ख – ४ख^{२}

३. २म^{२} + २मन + २न^{२} ४. ३अ^{२} + २ब^{२} + स^{२} + अब – ४अ स + ब स

५. – ३अ + ७ब – ९स + २द   ६. – अ + २ब – ८द

७. २क^{३} + ९क^{२} + ७

८. क^{२} – ३ख^{२}

९. क^{३} – क^{२}ख + कख^{२} १०. ४क^{३} – ४क^{२} – ५

११. २अ − ब + $\frac{3}{2}$म १२. १२क − १०ख

१३. ५य^{3} + ८य^{2} + २१

१४. २०क − १८ख + १३ग

१५. य − ५र + ४ल

१६. ३०क^{2} + २१कख − १६ख^{2}

१७. १३अ^{3} − ६अ^{2}ब + ३ब^{3}

१८. ८क − ६ख + १६ग

१९. ०

२०. कख$^{\frac{1}{3}}$ + ३खग$^{\frac{1}{3}}$ − ७√क + च

अभ्यास ७

१. २क − ४अ − १३ २. − २क^{2} + ४कख + ८ख^{2}

३. अ − २ब − ६द ४. − क + ५ख + ग + २

५. ६क^{4} − ३क^{3} − ६क − २९ ६. − अ − $\frac{13}{3}$ब + $\frac{8}{3}$स

७. ५ब^{4} − ५अ^{4} − ३अब^{3} + ३बअ^{3}

८. − बस + ४सअ + ४अब

९. − ३अ^{2} + २ब^{2} − ३स^{2} + बस + सअ + अब

१०. ३(ख − क)

११. ४(म − न)

१२. २क − २ख १३. ७य − १३र

१४. ४य − २र + २ल + ३द

१५. १५क^{2} − ९कख + ११ख^{2}

१६. २५य^{3} − २य^{2} + ५य + २१

१७. $च^{२} + चछ + ५चज + ग^{२} - ३$

१८. क — च

१९. $८यर - र^{२}$

२०. ०

२१. अय + कफ − गव

अभ्यास ८

१. $१२क^{२}$ २. $-१४क^{३}$

३. $अ^{४}ब^{४}स^{४}$ ४. $-६प^{३}फ^{३}$

५. $-अ^{२}ब^{२}$ ६. $ब^{२}$

७. $क^{६}$ ८. $-क^{६}$

९. $-८क^{३}ख^{३}$ १०. $-२७क^{६}ख^{३}$

११. ५अ + २५ब − १५स १२. − ८अ + १२ब − ८स

१३. $-३अ^{३} + ६अब - २१अ$ १४. $-१५क^{६} + १०क^{४} - ३०क^{२}$

१५. $६अब^{२} + ४अब^{३} - २ब^{४}$ १६. $६०अ^{४}ब^{४}स^{३} + १२अ^{७}ब^{८}$
$स^{४} - १०८ - अ^{६}ब^{६}स^{४}$

१७. $६अ^{३}ब - १२अ^{२}ब^{२} - ६अब^{३}$

१८. $-६क^{४} + ३०क^{३} - १८क^{२}$

१९. $अ^{२म}$

२०. $अ^{२क} + अ^{३क}$

अभ्यास ९

१. $४य^{२} - ९$ २. $६क^{२} - १६क + ८$ ३. $१५क^{२} - १६क - १५$

४. $८य^{२} + ६यक - ९क^{२}$ ५. $८य^{२} - ८कय + २क^{२}$ ६. $य^{३}$
$- र^{३}$

७. $\frac{१}{५} - \frac{४य^{२}}{५}$

८. २अस + ६बस − ५अद − १५बद

९. अ^{२} − २अक − १५क^{२}

१०. क^{३} + क^{२}ख − कख^{२} − ख^{३}

११. ६क^{३} − ३१क^{२}ख + ३९कख^{२} − १४ख^{३}

१२. य^{४} − ७य^{२}र^{२} + र^{४}

१३. य^{४} − ४यर^{२} + ३र^{४}

१४. क^{८} − क^{६} − क^{२} + १

१५. य^{६} + ३१२य^{२} − १

१६. य^{८} − य^{६} − य^{२} + १

१७. क^{३} + २क^{२} − ५क − ६

१८. य^{४} − १०य^{२}र^{२} + ९र^{२}

१९. अ^{४} − क^{४}

२०. ०

२१. २य^{३}

२२. ४कय

अभ्यास १०

१. २५क^{२} − ४९

२. ९य^{२} − २५

३. अ^{४} − ९ब^{२}

४. १०६९८०

५. २८७६,८८०

६. ४९क^{२} + ८४क + ३६

७. ४अ^{२} + २८अब + ४९ब^{२}

८. ४क^{२}

९. ८१

११. २०४४९, २४६४९

१२. ४९क^{२} − ८४क + ३६

१३. ४अ^{२} − २८अब + ४९ब^{२}

१४. ३६ख^{२} १६. ९०

१७. ८क^{३} + १२क^{२} + ६क + १, ३८९०१७

१८. ५२

१९. ८ − ३६क + ५४क^{२} − २७क^{३}; १०३८२३

२१. ३६   २२. क^{२} + १०क + २४   २३. क^{२} − ४क − ६०

अभ्यास ११

१. क − ४   २. क + ४   ३. ३य + १

४. य + ५   ५. २क − ४   ६. ३क + १

७. य + क   ८. क^{२} + २क − ३   ९. क^{२} − कख + ख^{२}

१०. क^{२} − कख + ख^{२}

११. ५य^{२} + ७यर − २क^{२}

१२. क^{३} − ३क^{२} + ५क − ७

१३. य^{२} + ३य + ९

१४. क^{२} − ४कख + ८ख^{२}

१५. ९अ^{२} + ६अय + २य^{२}

१६. य^{४} − य^{३} + य^{२} − य + १

१७. क^{४} + क^{२}ख^{२} + ख^{४}

१८. क^{३} − ५क^{२} + ३क + २

१९. १ + य + य^{२} + य^{३} + ...इत्यादि अनन्त

२०. १ + ४य + ८य^{२} + १२य^{३} + १६य^{४} + ...अनन्त

अभ्यास १२

१. ४ २. २ ३. ३ ४. ७
५. –१ ६. ७ ७. ५ ८. ३
९. –६ १०. –८ ११. ९ १२. –२
१३. १ १४. १२ १५. ३ १६. ३४
१७. ४० ४/५ १८. १५ १९. १६ २०. –३
२१. ९ २२. ५ २३. ५६ २४. –१
२५. ८ २६. १ २७. २ २८. १३८
२९. २ ३०. २

अभ्यास १३

१. १२ लड़के ४५ नीबू २. ४० भेड़ें, १३५) रु० ३. ५, १५
४. ४०) रु० ५. ७ और ४ ६. १५ मन
७. ८ सेर व ४ सेर ८. ६० रुपये और १२० पावली ९. ४
१०. २४ ११. ३६ १२. ५२ पौंड ५२ शिलिंग
१३. ६० वर्ष १४. १२, ८ कोस १५. ७०) रु०
१६. ५, ७ १७. ३८४); क को १६२) ख को ११८) और ग को १०४) मिलें १८. ३६ कोस
१९. १६ कबूतर व ९ तोते २०. १५ व १६ २१. ६२
२२. २६०० मनुष्य २३. कमल ३, भ्रमर ४
२४. ५४ २५. ६०, २४

अभ्यास १४

१.	य = ३,	र = ४	२.	य = ६	
३.	य = ८	र = २	४.	य = ७;	र
५.	य = १०;	र = १	६.	य =	
७.	य = ७;	र = ४	८.	य = २	र
९.	य = ३	र = ६	१०.	य = ८४;	र
११.	य = १२;	र = १५	१२.	य = १६;	र
१३.	य = ३५	र = ५६	१४.	य =	
१५.	य = ३	र = ८	१६.	य = १५	र = १
१७.	य = २	र = १	१८.	य = २४	र = ८
१९.	य = ७;	र = ३	२०.	य = ६	र = ५

॥ इति ॥

म० रामनारायण के प्रबन्ध से

हीरालाल प्रिंटिंग वर्क्स, सराय बारहसैनी, अलीगढ़ में मुद्रित